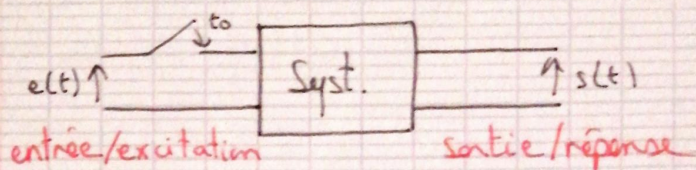


1

① équa diff



* Système : circuit électrique constitué de dipôles passifs (R, L, C)

À partir de l'instant t_0 (origine des temps) le système est soumis à une excitation $e(t)$.

But de l'étude $\Rightarrow$ connaître la réponse du système, c'est-à-dire l'expression du signal à la sortie.

Nous admettons que l'évolution de $s(t)$ en fonction de $e(t)$ est régie par une équation différentielle (E.D. à coeff. cts).

En d'autres termes, connaître la réponse temporelle d'un système passe par la résolution d'une E.D.

② Système du 1^{er} ordre

$$\text{EDO 1 : } A \cdot \dot{s}(t) + B \cdot s(t) = C \cdot e(t)$$

Mise sous forme canonique

2

$$\ddot{s}(t) + \frac{1}{\tau} \dot{s}(t) = K_1 \cdot e(t)$$

avec τ : constante de temps
caractéristique du circuit étudié.

Par identification : $\tau = \frac{A}{B}$

$$\Rightarrow \text{Solution : } s(t) = \underbrace{K_2 e^{-t/\tau}}_{\text{Sol. homogène (SH)}} + \underbrace{K_3 \cdot e(t)}_{\text{Sol. Particulière (SP)}}$$

↙
caractérise le transitoire
= 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$

↘
caractérise
le régime permanent.

② Système du 2^{ème} ordre

$$\text{EDO2 : } A \cdot \ddot{s}(t) + B \cdot \dot{s}(t) + C \cdot s(t) = D \cdot e(t)$$

Mise sous forme canonique

$$\ddot{s}(t) + \frac{B}{A} \dot{s}(t) + \frac{C}{A} s(t) = \frac{D}{A} \cdot e(t)$$

de la forme

$$\ddot{s}(t) + 2\lambda \cdot \dot{s}(t) + \omega_0^2 \cdot s(t) = K \cdot e(t)$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} 2\lambda = B/A \\ \omega_0^2 = C/A \end{cases}$$

où λ et ω_0
caractérise le syst.

λ : facteur d'amortissement
 ω_0 : pulsation propre

ELEC 2

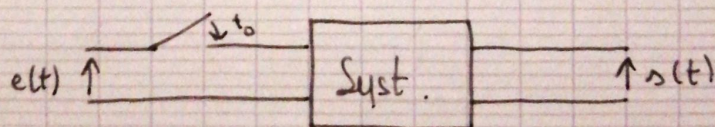
3

$$s(t) = \underbrace{e^{-\lambda t} \cdot [P(t)]}_{\substack{\text{SH} \\ \text{transitoire } (=0 \text{ pour } t \rightarrow +\infty)}} + \underbrace{k_f e(t)}_{\substack{\text{SP} \\ \text{Régime permanent}}}$$

③ Remarque

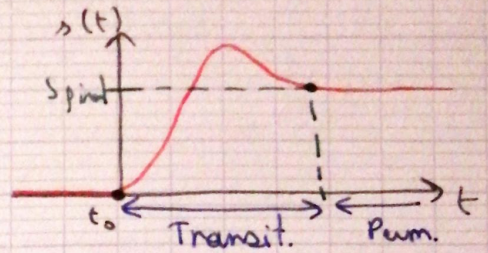
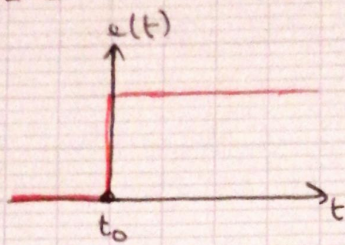
- * Régime linéaire (cadre de ce cours)
 τ et λ constantes toujours positive
- * Régime non linéaire τ et $\lambda < 0$
les limites physiques des systèmes sont alors la cause du phénomène de saturation.

② Notions de régime libre et régime forcé
observation à l'aide d'un oscilloscope
soit un oscilloscope de la sortie $s(t)$ d'un système dont l'enregistrement débute à l'instant t_0 (pris comme origine des temps).
Le dernier correspond à la date à partir de laquelle est appliqué un signal $e(t)$ à l'entrée du circuit. Nous distinguons deux intervalles de temps.



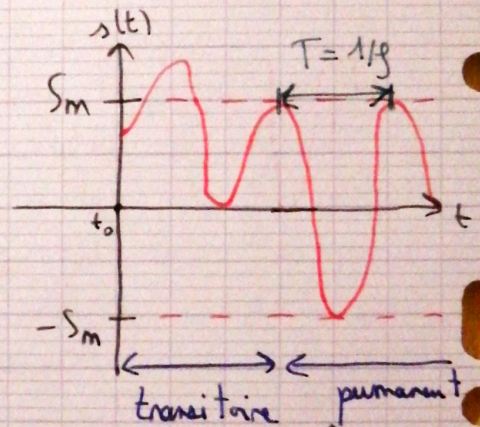
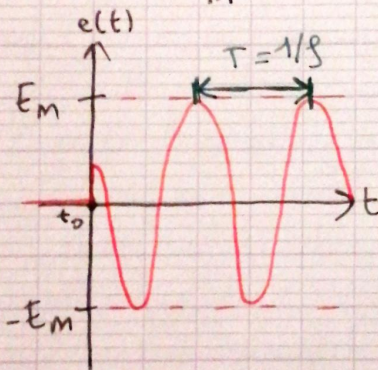
- Régime transitoire (ou libre)
Dépend des conditions initiales (C.I) du circuit.
- Régime permanent (ou forcé)
Ne dépend que de l'excitation $e(t)$ appliquée.

1^{er} exemple : le régime permanent correspond au régime continu (R.C).



2^e exemple : le régime permanent correspond au régime sinusoïdal (R.S) appelé aussi régime harmonique

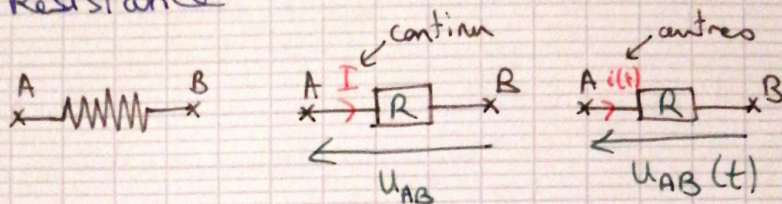
$$e(t) = E_m \cdot \cos(2\pi f t)$$



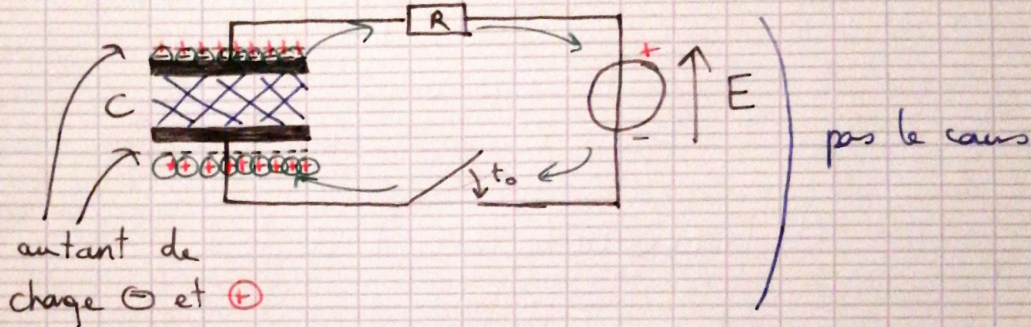
↑ les périodes sont identiques ↓

5 I Relation entre $u(t)$ et $i(t)$ pour différents dipôles

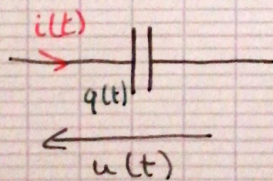
① Résistance



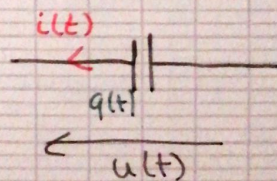
② Condensateur idéal



Récepteur



Générateur (pendant un intervalle de temps)



$$q(t) = C \cdot u(t)$$

Charge (Coulomb)

C : Capacité en Farad (F)

$$i(t) = \frac{d.q(t)}{dt} = C \cdot \frac{d.u(t)}{dt}$$

$$i(t) = - \frac{d.q(t)}{dt} = -C \cdot \frac{d.u(t)}{dt}$$

ou

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt + u(t=0)$$

CI (conditions initiales)

convention générateur

6



$u(t)$ (respectivement $q(t)$) ne présente pas de discontinuité sinon $i(t) \rightarrow +\infty$

Pas de variation instantanée de la tension (ou de la charge) aux bornes d'un condensateur

Remarque: En Régime continu (R.C) $u(t)$ et $i(t)$ tendent vers des valeurs constantes c.à.d lorsque $t \rightarrow \infty$

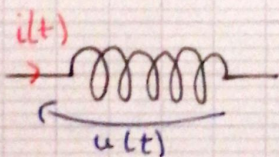
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{du(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = 0$$

un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en R.C.

par $t = +\infty$: $\text{---} \frac{C}{\text{---}} \equiv \text{---} / \text{---}$

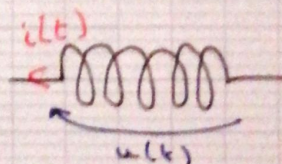
③ Bobine (inductance) idéale

Récepteur



$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Générateur



$$u(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$$

générateur

avec L : inductance en Henry (H)

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) \cdot dt + \underbrace{i(t=0)}_{\text{C.I.}}$$

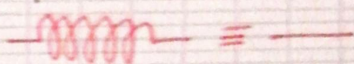


$i(t)$ ne présente pas de discontinuité sinon $u(t) \rightarrow +\infty$. Pas de variation instantanée de l'intensité de courant traversant une inductance

ELEC 2 Remarque: En R.C $u(t)$ et $i(t)$ tendent vers des valeurs constantes c'est à dire lorsque $t \rightarrow +\infty$

7 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{di(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$

une inductance (bobine) est équivalente à un court-circuit (un fil) en RC

pour $t \rightarrow +\infty$ 

⑥ Aspect énergétique

la variation d'énergie (ou plutôt l'énergie) dans un dipôle pendant une durée dt s'écrit :

$$dE = u(t) \cdot i(t) \cdot dt$$

$p(t)$, puissance instantanée.
 $E = \int^t dE$

* Cas d'une résistance R

$$dE_R = R i^2(t) dt = \frac{u^2(t)}{R} \cdot dt$$

* Cas d'un condensateur idéal

$$\begin{aligned} dE_C &= u(t) \cdot c \frac{du}{dt} \cdot dt \\ &= u(t) \cdot C \cdot du(t) \end{aligned}$$

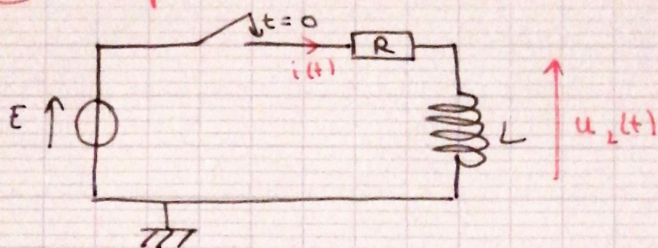
$$dE_C = d \left[\frac{1}{2} C u^2(t) \right]$$

* Cas d'une bobine idéale

$$dE_L = 2 \frac{di(t)}{dt} \cdot i(t) \cdot dt = 2 di(t) \cdot i(t) = d \left[\frac{1}{2} L i^2(t) \right]$$

8

II Exemple de circuit du 1^{er} ordre : circuit R, L série :



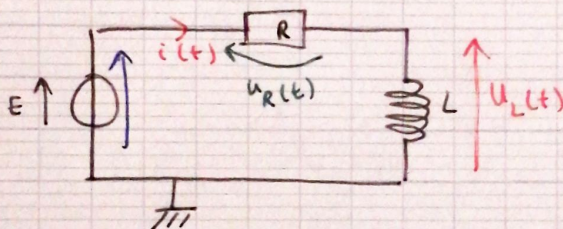
Hypothèse : Initialement la bobine est "non chargée".

$$i_L(t=0) = i_L(t=0^+) = 0$$

$i_L(t) = i(t)$ car circuit série

Problème $\Rightarrow$ expression de $i(t)$ et $u_L(t)$?

* loi des mailles à t quelconque



$$\boxed{E = u_R(t) + u_L(t)}$$

$$\Leftrightarrow E = R \cdot i(t) + L \frac{d i(t)}{dt}$$

Forme canonique : $\frac{d i(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i(t) = \frac{E}{L}$

Par identification $\Rightarrow \tau = \frac{L}{R}$; constante de temps du circuit

① SH $i(t) = A e^{-t/\tau}$

② SP $i(t) = E/R$

③ $i(t) = A e^{-t/\tau} + E/R$

④ Trouver A à l'aide des C.I.

Par Hyp : $i(t=0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$

ELEC 2

9

d'où au final l'expression de $i(t)$:

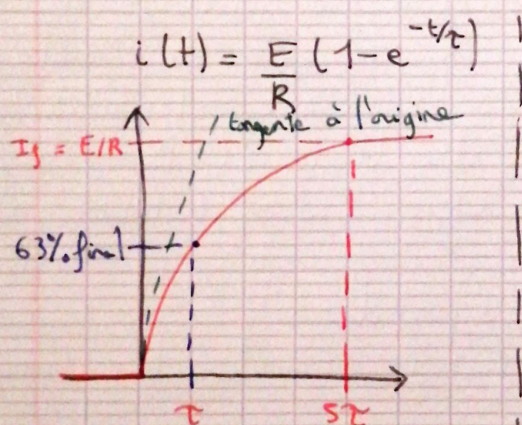
$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

Nous en déduisons $U_L(t)$:

$$U_L(t) = L \frac{d i(t)}{dt}$$

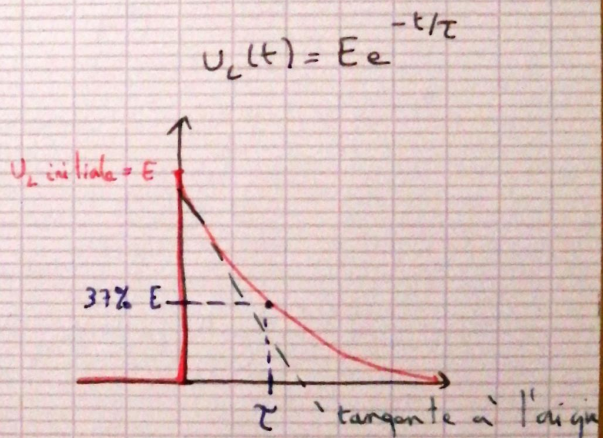
$$\Leftrightarrow U_L(t) = L \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{E}{R} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\Leftrightarrow U_L(t) = E e^{-t/\tau}$$



$$i(\tau) = \frac{E}{R} (1 - e^{-1}) \approx 0,63 E$$

$$i(5\tau) = \frac{E}{R} (1 - e^{-5}) \approx 0,99 \frac{E}{R}$$

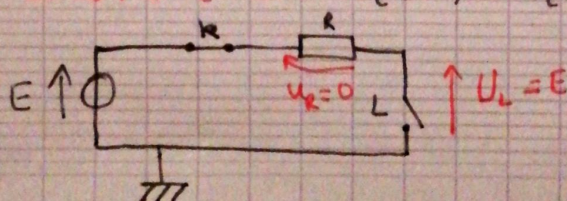


$$u_L(\tau) = E e^{-1} = 0,37 E$$

Résumé:

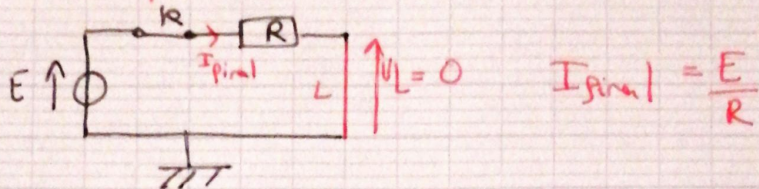
circuit à $t=0^+$

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \Rightarrow i(t)$ continue en $t=0$



10

circuit pour $t \rightarrow \infty$: en RC bobine $\bar{c}$ 1 p.1) comme



C.T. non nul:

$$i_L(t=0^+) = i_L(t=0^-) = i_0$$

$$i(t) = \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$$

III Exemple d'un circuit du deuxième ordre:
Régime propre du circuit RLC série.

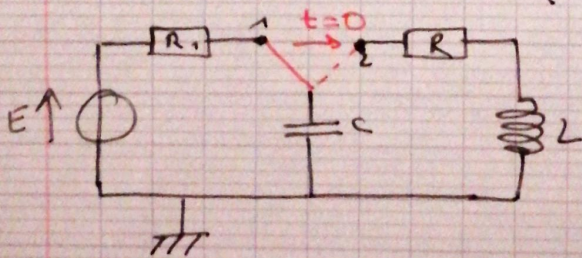
Régime propre: Evolution des grandeurs du circuit

s'il n'y a pas de générateur extérieur
 $\Rightarrow$ corolaire: L'énergie est initialement présente dans le circuit. Par exemple, le condensateur (et/ou la bobine) est initialement "chargé".

Par hypothèse nous prendrons:

$$\rightarrow u_C(t=0) = E = \frac{q_0}{C} \quad (\text{condensateur chargé})$$

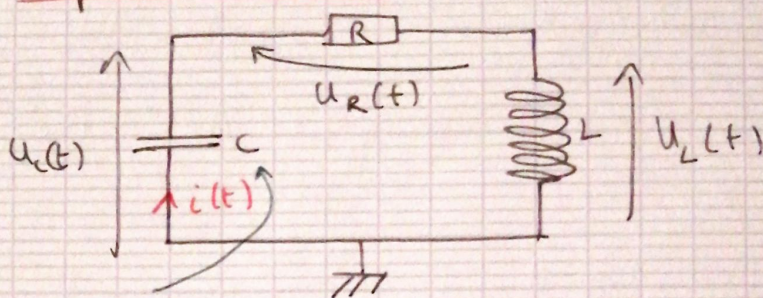
$$\rightarrow i_L(t=0) = 0 \quad (\text{bobine non chargée}).$$



ELEC 1

11

à partir de $t=0$:



C joue le rôle de générateur

$$C.I.: u_C(0) = \frac{q_0}{C}$$

Déterminer l'E.D.

$$u_C(t) = u_R(t) + u_L(t) \text{ avec } i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -\dot{q}(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{q(t)}{C} = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{q(t)}{C} = -R \dot{q}(t) - L \ddot{q}(t)$$

Forme canonique: $\ddot{q}(t) + \frac{R}{L} \dot{q}(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0$

E.D. sans second membre car pas de source externe
Régime propre $\Rightarrow$ seulement équation homogène

Par id: $\begin{cases} \rightarrow \text{Facteur d'amortissement } \lambda = R/2L \\ \rightarrow \text{Pulsation propre } \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \end{cases}$

d'où le discriminant réduit: $\Delta' = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}$ (càd $\lambda^2 - \omega_0^2$)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

càd $a = b = 2b' \rightarrow \Delta' = b'^2 - ac$

$$r_{1/2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ Régime périodique "aucune grandeur n'oscille"
 $\lambda^2 > \omega_0^2$
 2 racines réelles
 $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\Delta}$

on $\begin{cases} q(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \\ q(t) = e^{-\lambda t} [A e^{\sqrt{\Delta} t} + B e^{-\sqrt{\Delta} t}] \end{cases}$

Déterminer A et B $\Rightarrow$ avec les C.I

* $q(t=0) = q_0$

* $i(t=0) = -\left. \frac{dq(t)}{dt} \right|_{t=0} = i_2(0) = 0$

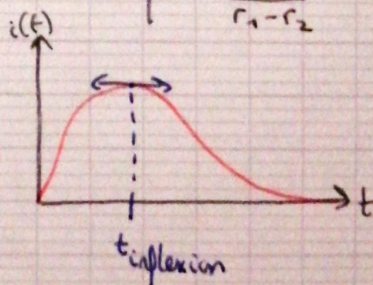
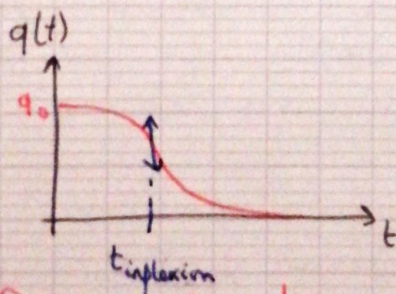
* $q_0 = A + B$ ①

* $-\frac{dq(t)}{dt} = -[A r_1 e^{r_1 t} + B r_2 e^{r_2 t}]$

$\Rightarrow i(t=0) = 0 = -[A r_1 + B r_2]$ ②

d'où $\begin{cases} q_0 = A + B \\ 0 = A r_1 + B r_2 \end{cases}$

résultat $\Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{r_2 q_0}{r_1 - r_2} \\ B = \frac{r_1 q_0}{r_1 - r_2} \end{cases}$



Régime aperiodique

ELEC 2 2^{ème} cas $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = \omega_0^2$ Régime critique

λ rac. double.

13

$$r = -\lambda = -\frac{R}{2L}$$

$$\Leftrightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$q(t) = e^{-\lambda t} [At + B]$$

A l'aide des C.I. $\Rightarrow \begin{cases} A = -r \cdot q_0 \\ B = q_0 \end{cases}$

3^{ème} cas $\Delta' < 0 \Rightarrow$ Régime pseudo périodique amorti

2 racine. conj.

$$\lambda^2 < \omega_0^2$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm j\sqrt{\delta}$$

$$q(t) = e^{-\lambda t} \cdot A \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \omega = \sqrt{\delta}$$

Déterminer A et φ avec les C.I.

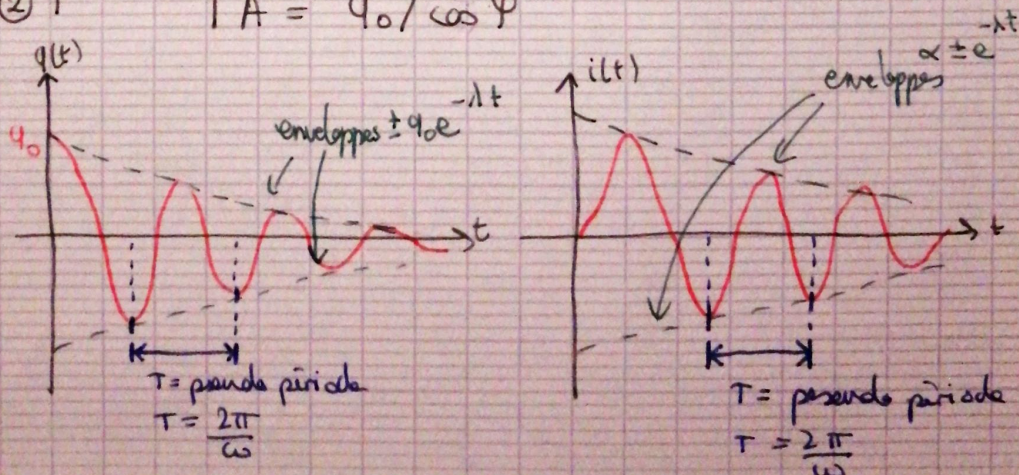
* $q_0 = A \cos \varphi$ ①

* $i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = e^{-\lambda t} [\lambda A \cos(\omega t + \varphi) + A \omega \sin(\omega t + \varphi)]$

$\Rightarrow i(0) = \lambda A \cos \varphi + \omega A \sin \varphi = 0$ ②

① $\Rightarrow \varphi = -\text{Arctan}(\lambda/\omega)$

② $A = q_0 / \cos \varphi$



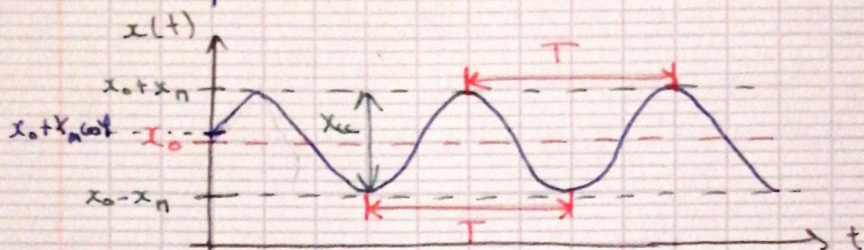
SOUVENT DANS
LES CC

14

Les grandeurs sont confinées dans des enveloppes $\pm e^{-\lambda t}$
avec $\lambda = \frac{R}{2L}$ donc d'autant + rapidement
que R est grande.

⑤ Expression générale d'un signal sinusoïdal

Définitions de ses caractéristiques



$$x(t) = X_0 + X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Phase à l'origine

Pulsation

Amplitude du signal

* 3 termes équivalents

Mesure à l'aide d'un voltmètre-ampèremètre en position DC

* Comp. continue
ou* Offset
ou

* V-al moyenne

notée aussi $\langle x(t) \rangle$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

avec T: période du signal

* Amplitude du signal X_m

En pratique, cas de l'observation d'une tension avec oscilloscope mesure plutôt de:

$$X_{cc} = X_{pp}$$

$$X_{cc} = 2X_m$$

"crête à crête" ; "peak to peak"

* Pulsation ω

$$\omega = \frac{2\pi f}{\text{rad.s}^{-1}} = \frac{2\pi}{T} \quad \leftarrow \text{car } f = \frac{1}{T}$$

rad.s^{-1} rad.s^{-1}
 $\updownarrow$
 Hz

* Observation à l'aide d'un oscilloscope

- Position (au couplage) DC $\Rightarrow$ observation de la globalité du signal.

$$\text{comp. continue} + \text{comp. alternative} \\ X_0 \qquad \qquad \qquad X_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

- Position (au couplage) AC $\Rightarrow$ activation d'un filtre "passe haut". Observation seulement de la comp. alternative. $X_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$.

(II) Cas du régime sinusoïdal (ou harmonique)

- Composante continue $X_0 = 0$

$$x(t) = X_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

- Notion de Valeur efficace X_{eff} .
(Root Mean Square) RMS

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T x^2(t) \cdot dt}$$

Mesure à l'aide d'un voltmètre/ampèremètre en position AC.

Cas particulier du régime harmonique

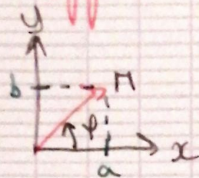
$$X_{\text{eff}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

ELEC 2

17

La valeur efficace X_{eff} d'un signal périodique $x(t)$ correspond à la valeur prise par un signal continu établi pendant une durée T qui dissiperait la même énergie (par effet Joule) que $x(t)$ dans le même circuit électrique.

III) Rappels sur les complexes



$\vec{OM} \rightarrow$ coordonnées polaires
 $\vec{z} = \rho e^{j\varphi}$

$$|\vec{OM}| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\rightarrow$ coordonnées cartésiennes
 $\vec{z} = a + jb$

$$\begin{cases} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

$$\arg(\vec{z}) = \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

IV) Représentation complexe $[x(t)]$ d'un signal harmonique $x(t)$

Par def: $x(t) = \text{Re}[x(t)]$

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow [x(t)] = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\text{ou plutôt } [x(t)] = \bar{X} e^{j\omega t}$$

$\bar{X} = X_m e^{j\varphi}$ $e^{j\omega t}$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 traduit la périodicité du signal

avec $\bar{X}$: Amplitude complexe de $x(t)$

$$\bar{X} = X_m e^{j\varphi} \text{ avec } X_m = \text{module de } \bar{X}$$

$\varphi = \text{Argument de } \bar{X}$

18

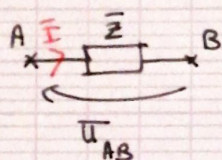
Chap IV : Régime Sinusoidal Permanent

① Lois et théorème en régime sinusoidal (ou harmonique)

Toutes les lois et théorèmes énoncés en Régime continu s'appliquent avec les notions d'impédances et d'amplitudes complexes.

② Impédances complexes

④ Définitions générale



$$U_{AB} = \bar{Z} \cdot \bar{I} \quad \begin{cases} \bar{I} = \bar{Y} \cdot U_{AB} \\ \bar{Z} : \text{impédance complexe} & \bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} : \text{Admittance complexe} \end{cases}$$

Écritures Possibles :

$$* \bar{Z} = Z e^{j\varphi_Z}$$

avec $Z = |\bar{Z}|$, Z en Ω
langage usuel : Z est l'impédance

$$* \bar{Y} = Y e^{j\varphi_Y}$$

Y en Siemens (S) ; ($Y = \frac{1}{Z}$)
langage usuel : Y est l'admittance.

$$* \bar{Z} = R + jX$$

Resistance (R) Réactance (X)

$$* \bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = G + jS$$

conductance (S) susceptance (S)

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi_Z = \text{Arctan}\left(\frac{X}{R}\right)$$

$$Y = \sqrt{G^2 + S^2}$$

$$\varphi_Y = \text{Arctan}\left(\frac{S}{G}\right)$$

20

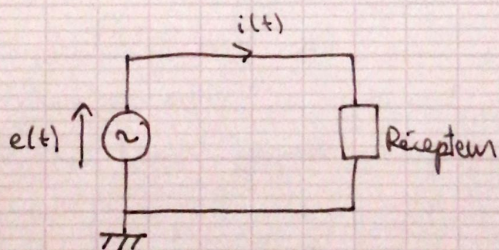
② Impédances complexes des dipôles usuels

$$R \rightarrow \bar{Z}_R = R \begin{cases} Z_R = R \\ \varphi_R = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

$$C \rightarrow \bar{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \begin{cases} Z_C = \frac{1}{C\omega} \\ \varphi_C = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \bar{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}$$

$$L \rightarrow \bar{Z}_L = jL\omega \begin{cases} Z_L = L\omega \\ \varphi_L = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

③ Démonstration

III) Déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$ 

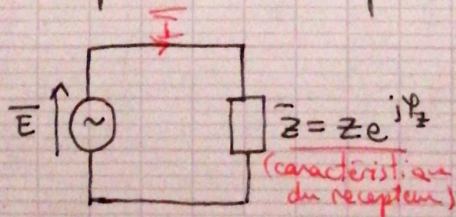
$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$\Rightarrow$ déterminer I_m et φ_i ?

sachant que $\bar{I} = I_m e^{j\varphi_i}$ ①

* Représentation complexe :



$$* \bar{E} = E_m e^{j\varphi_e}$$

$$* \bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{I_m}{Z} e^{j(\varphi_e - \varphi_z)} \quad ②$$

$\Rightarrow$ Par identification avec ①

$$\begin{cases} I_m = \frac{E_m}{Z} \\ \varphi_i = \varphi_e - \varphi_z \end{cases}$$

21

⚠ Par convention, la référence est la tension $e(t)$
 grandeur par laquelle nous considérons $\varphi_e = 0$ (phase à l'origine nulle)

⇒ Conséquences directes

① $\varphi_i = -\varphi_z = -[\text{Arg } \bar{Z}]$

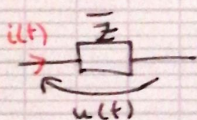
② φ_i est le déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$

$\varphi_i > 0 \Rightarrow i(t)$ en avance sur $e(t)$

$\varphi_i < 0 \Rightarrow i(t)$ en retard sur $e(t)$

$\varphi_i = 0 \Rightarrow i(t)$ en phase avec $e(t)$

IV Notion de puissance moyenne ou puissance active



$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

⚠ φ est ici le déphasage de $i(t)/u(t)$ tension aux bornes du dipôle.
 $\varphi = -\text{Arg}[\bar{Z}]$

Par définition :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt$$

$$= \frac{1}{T} \cdot U_m \cdot I_m \int_0^T \underbrace{\cos(\omega t + \varphi)}_{\cos a} \underbrace{\cos(\omega t)}_{\cos b} \cdot dt$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} U_m I_m \left[\int_0^T \cos \varphi dt + \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt \right]$$

Pas à connaître
(démon)

$$P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos \varphi = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

22

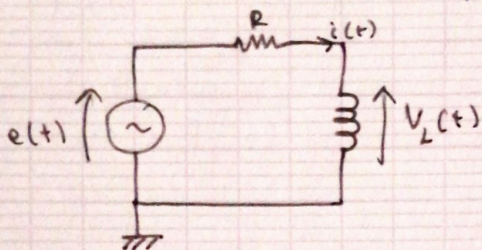


Rem: $P=0$ si $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

$\begin{cases} \bar{Z} = \bar{Z}_c & \text{condensateur} \\ \bar{Z} = \bar{Z}_L & \text{bobine} \end{cases}$

⑤ Etude de circuits

① Circuit série R, L



Données :

$$\begin{cases} R = 10 \Omega \\ L = 100 \text{ mH} \\ f = 10 \text{ Hz} \Leftrightarrow \omega = 20\pi \text{ rad.s}^{-1} \\ E_{\text{eff}} = 0,707 \text{ V} \Leftrightarrow E_m = 1 \text{ V} \end{cases}$$

* $e(t) = E_m \cdot \cos(\omega t) = E_m \cos(20\pi t)$

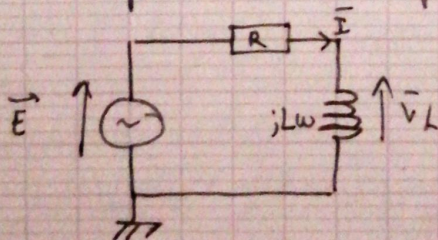
* Nous savons que les expressions de $i(t)$ et $V_L(t)$ sont respectivement :

$$i(t) = I_m \cdot \cos(20\pi t + \varphi_i)$$

$$V_L(t) = L_m \cos(20\pi t + \varphi_{V_L})$$

* Nous cherchons à déterminer (I_m, φ_i) et (V_{Lm}, φ_{V_L})

$\Rightarrow$ Représentation complexe :



* $\bar{E} = E_m$ car $e(t) = E_m \cos(\omega t)$

* $\bar{Z} = R + jL\omega$ $\begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \\ \varphi_{\bar{Z}} = \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right) \end{cases}$

* $\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{E_m}{\bar{Z}} e^{-j\varphi_{\bar{Z}}}$

23

$$\Rightarrow \begin{cases} I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \\ \varphi_I = -\text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right) \end{cases}$$

AN:

$$I_m = \frac{1}{\sqrt{100 + (10^{-2} \cdot 20\pi)^2}} = 85 \text{ mA}$$

$$\varphi_I = -\text{Arctan}\left(\frac{10^{-2} \cdot 20\pi}{10}\right) = -0,56 \text{ rad}$$

$$\text{d'où } i(t) = 85 \cdot 10^{-3} \cos(20\pi t - 0,56)$$

$\downarrow$
i(t) en retard sur e(t)

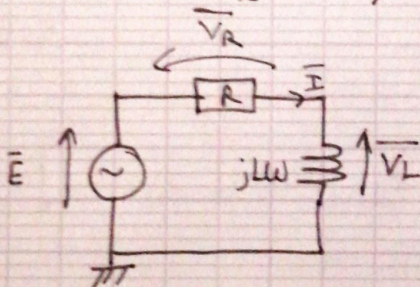
$$* \bar{V}_L = \frac{\bar{Z}_L}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_L} \bar{E} \quad (\text{div de tension!})$$

$$\bar{V}_L = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} E_m \Rightarrow * V_{Lm} = \frac{L\omega E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \approx 0,53 \text{ V}$$

$$* \varphi_{VL} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{L\omega}{R}\right) \approx 1 \text{ rad}$$

$$\text{d'où } V_L(t) = 0,53 \cos(20\pi t + 1)$$

$\downarrow$
avance de $V_L(t)$ sur e(t)



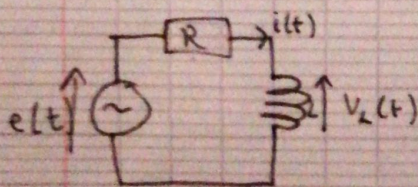
$$\bar{V}_R = R \bar{I} = R I_m e^{j\varphi_I}$$

$$\Rightarrow V_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$= 10 \cdot 85 \cdot 10^{-3} \cos(20\pi t - 0,56)$$

$$V_R(t) = 85 \times 10^{-2} \cos(20\pi t - 0,56)$$

En résumé:



Ram: $V_R(t)$ et $i(t)$ ont le même déphasage par rapport à $e(t)$.

Déphasage nul de $i(t)$ à $V_R(t)$

$$e(t) = 1 \cdot \cos(20\pi t)$$

$$i(t) = 85 \cdot 10^{-3} \cos(20\pi t - 0,56)$$

$$V_R(t) = 85 \cdot 10^{-2} \cos(20\pi t - 0,56)$$

$$V_L(t) = 0,53 \cos(20\pi t + 1)$$

2.4 Aspect puissance : * Puissance fournie par $e(t)$

$$P_g = \frac{1}{2} E_m I_m \cos \varphi_i$$

AN : $P_g = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 85 \cdot 10^{-3} \cos(0,56) \approx 36 \text{ mW}$

* Puissance dissipée par le circuit

$$P = P_R + P_L$$

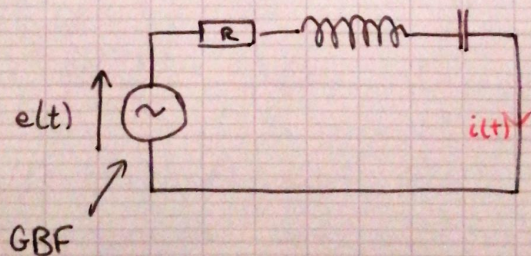
$$P_R = \frac{1}{2} V_{Rm} \cdot I_m \quad \text{pas de déphasage entre } V_R(t) \text{ et } i(t)$$

AN : $P_R = \frac{1}{2} \cdot 85^2 \cdot 10^{-5} \approx 36 \text{ mW}$

$$P_L = \frac{1}{2} V_{Lm} \cdot I_m \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

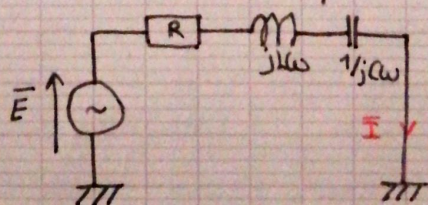
déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ [câd - $\text{Arg}(j\omega L)$]
de $i(t)$ par rapport à $V_L(t)$

② Circuit RLC série - Phénomène de résonance



$$e(t) = E_m \cos(\omega t) \\ E = E_m$$

Représentation complexe :



$$* \bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{E_m}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

25 d'ai

$$\left\{ \begin{aligned} * I_m &= \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(2\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \\ * \varphi_x &= -\text{Arctg}\left[\frac{2\omega L - \frac{1}{C\omega}}{R}\right] = \text{Arctg}\left[\frac{\frac{1}{C\omega} - 2\omega L}{R}\right] \end{aligned} \right.$$

Etude la variation de l'amplitude I_m de $i(t)$ en fonct^o de f (ou ω)

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(2\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

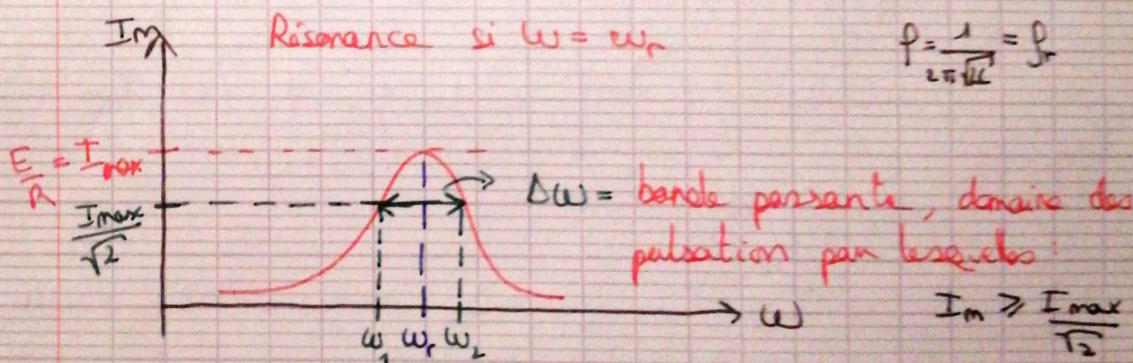
$$* \omega \rightarrow 0 \quad I_m \approx E_m C \cdot \omega \rightarrow 0$$

$$* \omega \rightarrow +\infty \quad I_m \approx \frac{E_m}{2L\omega} \rightarrow 0$$

$$* I_m = I_{\max} \text{ si } Z = Z_{\min} = R \text{ c\`ad par } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_r$$

ou

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f_r$$



→ Utilisation du circuit RLC série pour détecter (réception) (par le choix des valeurs de L et C peuvent être des composants variables) en signal

émis à la fréquence particulière $f(\equiv f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}})$. Cette acuité au phénomène de résonance est quantifiée par le **facteur de qualité** Q .

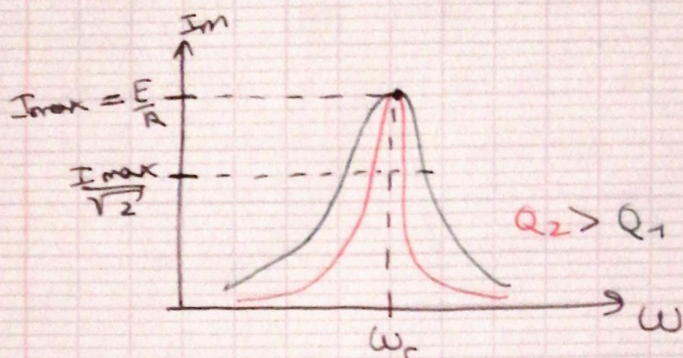
Dans le cas de ce circuit (R, L , série)

$$\Delta\omega = R/L$$

$$\text{ou } \Delta f = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{R}{L}\right)$$

Par définition: $Q = \frac{\omega R}{\Delta \omega} = \frac{L \omega_r}{R}$

$Q \uparrow$ si $\Delta \omega \downarrow \Rightarrow$ bande passante très faible, circuit très sélectif.



Phénomène de surtension

Pour $\omega = \omega_r \Rightarrow I_m = \frac{E_m}{R} \equiv I_{\max}$

$(\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}})$

$\underline{U_{Lm}} = L \omega_r I_m = \frac{L \omega_r}{R} \cdot \frac{E_m}{R} = \underline{Q E_m}$

$\Leftrightarrow L \omega_r = \frac{1}{C \omega_r}$

$\underline{U_{cm}} = \frac{1}{C \omega_r} I_m = \frac{L \omega_r}{R} \frac{E_m}{R} = \underline{Q E_m}$
 $= \frac{L}{R}$

exemple d'AN:

$E_m = 6V$

$R = 1\Omega$

$C = 10\mu F$

$L = 1H$

$\Rightarrow \omega_r = 316 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow f_r = 50\text{Hz}$

$Q = 316$

$U_{cm} = U_{Lm} = 1900V \quad \triangle$

À comparer avec l'amplitude de la tension délivrée par le générateur. $E_m = 6V$.