

WARNING !!!!!

/!\ VENEZ AUX COURS D'AMPHI ILS SONT TROP BIEN /!

(mais bon si jamais vos notes semblent être incomplètes... y'a ce doc)

INTRO

V : Potentiel électrostatique (Volt)

$\vec{E}$: Champ électrique (Volt.m⁻¹)

$\vec{B}$: Champ magnétique (T-tesla) ← en 2A

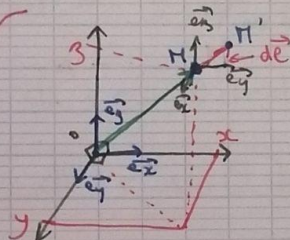
Théorie des champs

Champ électromagnétique ($\vec{E} + \vec{B}$)

Ondes électromagnétique; ex: lumière

CHAPITRE 0

Rappels - Systèmes de coordonnées



Repère cartésien

$\vec{OP}$: vecteur position

$$\vec{OP} = \vec{r}$$

$$|\vec{OP}| = \|\vec{r}\| = r$$

$$\vec{r} = \vec{OP} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$[x] = [y] = [z] = l \sim \text{mètres}$$

$l \Rightarrow$ dimension

Π : un point infinitésimement voisin de Π (co de Π' par rapport à z):

$$d\vec{l} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z \leftarrow \text{déplacement élémentaire}$$

surface infinitésimement petite (surface élémentaire):

$$dS = dx.dy$$

$$dS = dx.dz$$

$$dS = dy.dz$$

trois possibilités sur $d\vec{l}$.

$$d\vec{S} = dx.dy.\vec{e}_z \leftarrow \text{normale au plan}$$

$\nearrow$ pseudo vecteur car on ne connaît pas la direct° de $\vec{e}_z$.

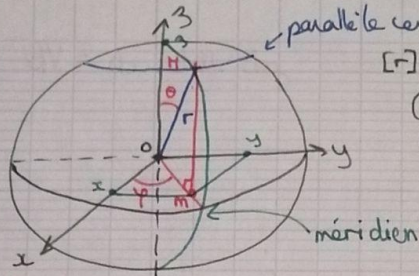
pseudo vecteur de la surface élémentaire.

$$d\vec{S} = dx.dz.\vec{e}_y \text{ et } d\vec{S} = dy.dz.\vec{e}_x$$

$$dV = dx.dy.dz$$

Cartésien

2



Syst de Coord. Sphériques

← parallèle cercle de rayon $r \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$

$[r] = \text{Mètres}$

$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$

$$\sin \theta = \frac{\overline{O_m}}{r}$$

$[\theta] = [\varphi] = \text{sans dimensions}$

~~$$\frac{r \sin \theta}{r} = \frac{z}{r}$$~~

$$z = r \cos \theta$$

$$x = \overline{O_m} \cdot \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \overline{O_m} \cdot \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi$$

3

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta \cos\varphi \vec{e}_x + \cos\theta \sin\varphi \vec{e}_y - \sin\theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y \end{aligned} \right\} \text{TD n°1}$$

$$\boxed{d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi} \quad \text{déplacement élémentaire}$$

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

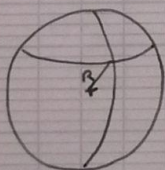
$$\boxed{d\vec{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r} \quad \begin{array}{l} \text{normale à la surface} \\ \text{surface élémentaire} \end{array}$$

$$d\vec{S} = r dr d\theta \vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{S} = r \sin\theta dr d\varphi \vec{e}_\theta$$

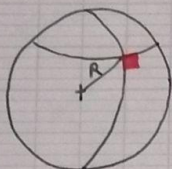
$$\boxed{dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi} \quad \text{volume élémentaire}$$

Volume d'une sphère de rayon R



$$\begin{aligned} V_{\text{sphère}} &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^R r^2 dr \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \cdot \left[-\cos\theta \right]_0^\pi \cdot \left[\varphi \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

4



Surface d'une sphère
de Rayon R

$$dS = R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$S_{\text{sphère}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$= R^2 \int_0^\pi R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi$$

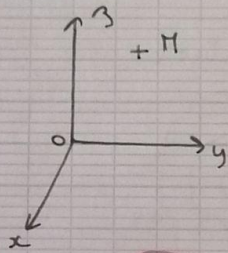
$$S_{\text{sphère}} = 4\pi R^2$$

5

Chapitre 1: Champs scalaires, champs de vecteurs (théorie des champs)

I Champs de scalaire

① Définition



$$f(M) \text{ de } \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^3$$

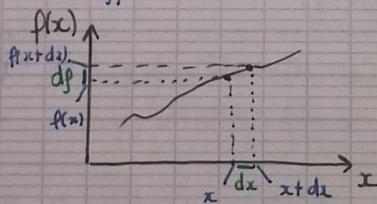
$$M \rightarrow f(M)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow f(x, y, z)$$

$$T(^{\circ}), p(Pa), V \text{ (volt)}$$

Potentiel électrique

② différentielle totale exacte (DTE)



$$f'(x) = \frac{df}{dx} \Rightarrow df = \frac{df}{dx} dx$$

↑ différentielle
totale exacte de f .

$$\int_{x_1}^{x_2} df = f(x_2) - f(x_1)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

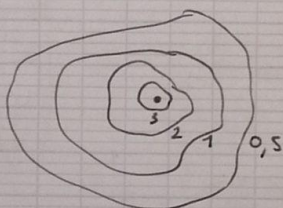
$$\Rightarrow \int_{M_1}^{M_2} df = f(M_2) - f(M_1) = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

6

③ Surfaces de niveaux

Une surface de niveau est une surface de l'espace Ω qui passe par tous les points de Ω qui ont la même valeur de f / $f(M) = cte$
 Les surfaces de niveaux du champs de scalaire V (Potentiel élec.).

Surfaces equipotentiellles.



① Champs de vecteurs : champs vectoriels

① définition

$$\vec{a}(M) \quad \vec{F}(M), \vec{V}_{(m.s^{-1})}, \vec{E}_{(volt/m)}$$

$$M(x, y, z) \rightarrow \vec{a}(M) = \begin{pmatrix} a_x(x, y, z) \\ a_y(x, y, z) \\ a_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

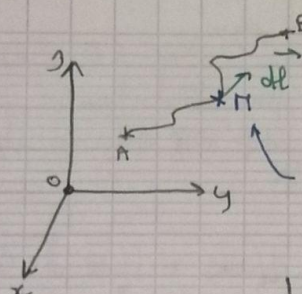
$$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{a}(M) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

$\vec{E}$ champ électrique

$$\|\vec{E}\| = E \text{ (volt/m)}$$

② intégrales vectorielle n°1 : La CIRCULATION



A: pt de départ
 B: pt d'arrivée } parcours
 il s'agit du point A au point B
 suivant le parcours.

$$\int dC = \vec{a} \cdot d\vec{e}$$

$$C_{A \rightarrow B} = \int_A^B dC$$

$$\Rightarrow C_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{e}$$

circulation élémentaire au point
 $M: dC = \vec{a} \cdot d\vec{e}$ et $C_{A \rightarrow B} = \int_A^B dC$
 $d\vec{e}$: déplacement élémentaire
 il y a une longueur infiniment
 petite de longueur dl Tangent au
 parcours.

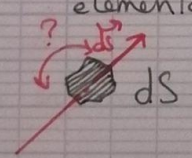
Travail d'une force:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{e}$$

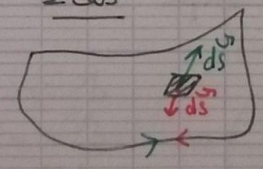
(Joules)

EN GENERAL, LA CIRCULATION DEPEND DU
 TRAJET.

② intégrales vectorielle n°2: LE FLUX
 représentation d'un élément de surface
 élémentaire par un pseudo-vecteur.

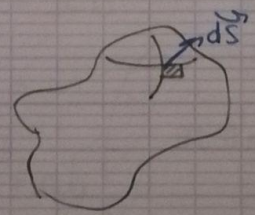


2 cas:

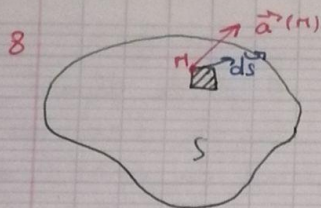


surface ouverte.

dépendant du sens de l'int.



surface fermée
 toujours vers l'extérieur
 de la surface fermée.

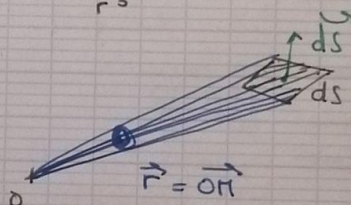


flux élémentaire :
 $d\Phi = \vec{a} \cdot d\vec{S}$

$$\Phi_S = \iint_S d\Phi = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

Exemple très important non superflu : l'angle solide.
 L'angle solide sous lequel depuis le point O, je "vois" une surface élémentaire dS est le flux du vecteur $\frac{\vec{r}}{r^3}$ à travers cette surface.

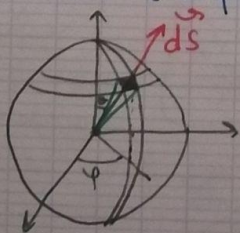
angle solide : Ω



$$d\Omega = \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Omega_S = \iint_S d\Omega = \iint_S \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r \cdot d\vec{S}$$

$$\text{or } \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

écrivons l'angle solide élémentaire en coord sphérique.



$$dS = r \cdot d\theta \cdot r \sin\theta \cdot d\varphi$$

$$d\vec{S} = r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_r$$

$$d\Omega = \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{\vec{e}_r}{r^2} \cdot r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_r$$

$$d\Omega = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin\theta \cdot d\varphi$$

$$dV = r^2 \cdot dr \cdot d\Omega$$

9 angle: $\theta = \frac{\Delta}{r}$ ^{corde}

$$\theta_{\max} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad (CQFD)}.$$

angle solide: $\theta^s = \frac{S}{R^2}$

$$\Rightarrow \theta_{\max}^s = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \text{ stéradians}$$

surface boule: $4\pi R^2$.

④ lignes de champ

Une ligne de champ est une courbe dans l'espace qui en tout point est tangente au vecteur champ.

$\vec{a} \parallel \frac{d\vec{r}}{ds}$ ^{tangent}

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}$$

I Opérateur Nabla $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

II $\vec{\nabla}$ agissant sur un champ de scalaire f

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{bmatrix} = \vec{\text{grad}} f \quad \text{le gradient est un vecteur.}$$

le gradient pointe dans la direction où f croît le plus rapidement.

✓ on a crée Nabla par que cette propriété soit vraie donc c'est pas un théorème
Propriété / théorème / définition du gradient

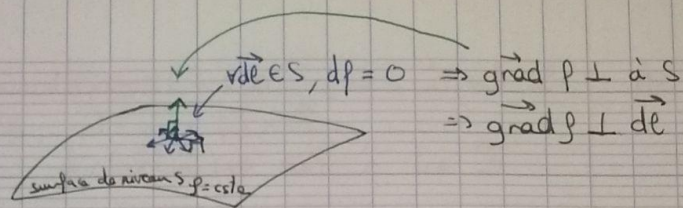
$$\vec{d\ell} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\text{grad}} f \cdot \vec{d\ell} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df \quad \triangle \text{ différentielle totale exacte.}$$

$$C_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{\text{grad}} f \cdot \vec{d\ell} = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$

↳ indépendant du trajet entre A et B

Un champ de gradient est à circulation conservative

si $\vec{a} = \vec{\text{grad}} f$ alors $\vec{a}$ est à circulation conservative.



$\text{grad } p$ au point M , situé sur la surface de niveau est $\perp$ à cette surface de niveau.

$$\text{grad } p \cdot d\vec{e} = dp = 0$$

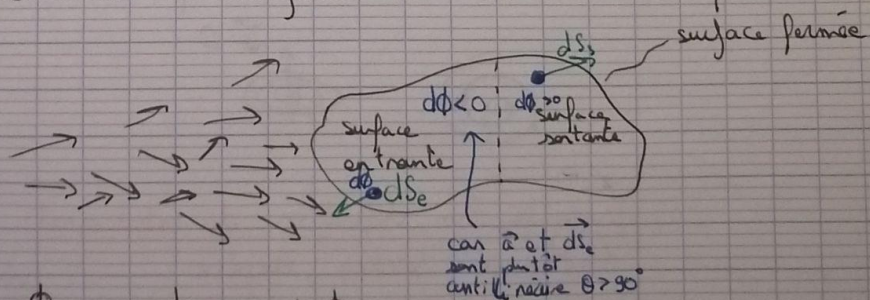
$\text{grad } p$ est $\perp$ aux surfaces de niveau

III) $\vec{\nabla}$ agissant sur un champ de vecteurs $\vec{a}$ par le produit scalaire: DIVERGENCE

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x(x,y,z) \\ a_y(x,y,z) \\ a_z(x,y,z) \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} \quad \text{la divergence est un scalaire.}$$

la notion de divergence est liée à celle du flux.



$$\begin{aligned} \Phi_{S, \text{fermée}} &= \Phi_{S, \text{entrante}} + \Phi_{S, \text{sortante}} \\ &= \iint d\Phi_e + \iint d\Phi_s \\ &= \Phi_e < 0 + \Phi_s > 0 \end{aligned}$$

12 Si $\text{div } \vec{a} = 0$, $|\phi_e| = |\phi_s|$ alors $\phi_{\text{fermé}} = 0$

$\vec{a}$ est à flux conservatif.

Prop, th, def de la divergence

↳ Le théorème de Green-Ostrogradsky

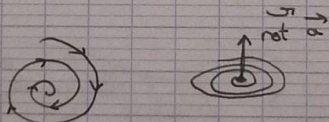
$$\iint_{S_{\text{fermé}}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_{\text{intérieur}}} \text{div } \vec{a} \cdot dV$$

III $\vec{\nabla}$ agissant sur un champ de vecteurs $\vec{a}$ par le produit vectoriel: **ROTATIONNEL**

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \vec{\text{rot}} \vec{a}$$

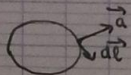
Le rotationnel permet de caractériser les "tourbillons" du champ de vecteurs.



Propriété, thm, définition du rotationnel

↳ thm de Stokes, Ampère

$$\int_{\text{fermé}} \vec{a} \cdot d\vec{e} = \iint_{S_{\text{ouvert}} \text{ qui s'appuie sur } e} \vec{\text{rot}} \vec{a} \cdot d\vec{S}$$



13

Travail à faire :

$$\forall f, \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a}) = 0$$

$\vec{a}$: si $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$ donc $\vec{a} = \operatorname{grad} f$
donc $\vec{a}$ est à circulation conservative.

$\vec{b}$: si $\operatorname{div} \vec{b} = 0$ alors $\vec{b} = \operatorname{rot} \vec{a}$
avec $\vec{b}$ est à flux conservatif.

⑤ $\vec{\nabla}$ agissant 2 fois : Laplacien de f

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f \quad \text{Laplacien de } f.$$

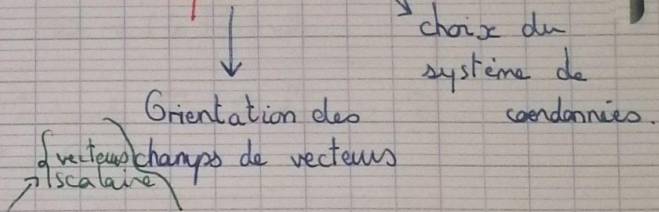
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Equation de Laplace : $\Delta f = 0$

$$\Delta f = 0 \Rightarrow \vec{a} = \operatorname{grad} f$$

$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{a} = 0$ donc $\vec{a}$ est à circulation conservative et à flux conservatif.

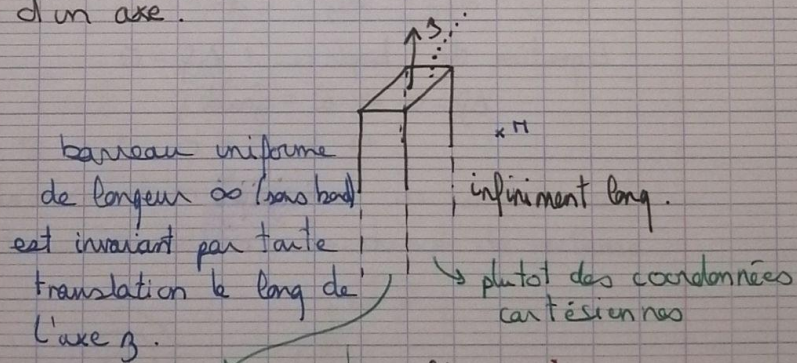
Chapitre 3 : Invariances et symétries



des grandeurs physiques générées par un système électrique possèdent les m symétries et les m invariances que ce système.

I Invariances par translation

* Invariance par toutes translations le long d'un axe.



par des coordonnées cyl.

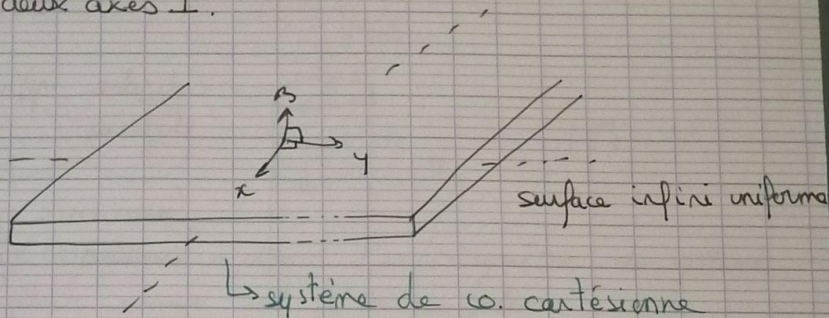
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(r, \theta) \\ a_y(r, \theta) \\ a_z(r, \theta) \end{pmatrix}$$

$\rho(x, y, z)$

car invariant en z .

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(x, y, z) \\ a_y(x, y, z) \\ a_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

15 * Invariance par toutes translation le long de deux axes $\perp$.



$$p(x, y, z) \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(x, y, z) \\ a_y(x, y, z) \\ a_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(z) \\ a_y(z) \\ a_z(z) \end{pmatrix}$$

* Invariance par toute translation le long de 3 axes $\perp$.

le vide $f = \text{cst}$ et $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = \text{cte} \\ a_y = \text{cte} \\ a_z = \text{cte} \end{pmatrix}$

on dit que les propriétés sont uniformes.

(II) Invariances par rotation

cylindrique
uniforme



+ π invariance par toute rotation autour de l'axe z .

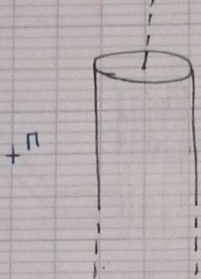
↳ syst de coord cylindrique (r, θ, z)

$$p(r, \theta, z) \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_r(r, z) \\ a_\theta(r, z) \\ a_z(r, z) \end{pmatrix}$$

16



COMBOOOOOOOO !!!



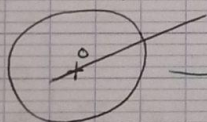
cylindre infiniment long d'axe z
uniforme.

invariance par toute translation selon z
invariance $\forall$ rotat° selon z

$$\Rightarrow f(r) \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_r(r) \\ a_\theta(r) \\ a_z(r) \end{pmatrix}$$

III Invariance par rotation autour d'un point

sphère uniforme

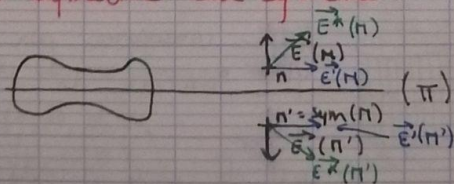


sest. de coo. sphérique

$$\Rightarrow f(r)$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_r(r) \\ a_\theta(r) \\ a_\phi(r) \end{pmatrix}$$

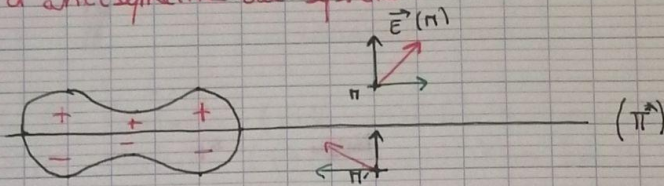
IV Comportement d'un champ vectoriel dans un plan de symétrie du système.



En tout point d'un plan dans symétrie du système,
le vecteur champ est contenu dans ce plan ($E_\perp = 0$).

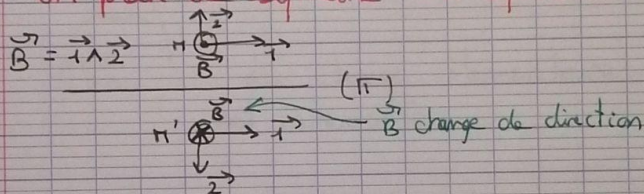
17

(V) Comportement d'un champ vectoriel dans un plan d'antisymétrie du système.

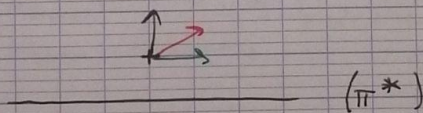


En tout point d'un plan d'anti-symétrie du système le vecteur champ est $\perp$ à ce plan.

(VI) Comportement d'un pseudo champ vectoriel dans un plan de symétrie du système



(VII) Comportement d'un pseudo champ vectoriel dans un plan d'antisymétrie.



INSAPENSER
LES FUTURS
ET AGIR
AVEC SENS

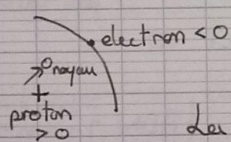
je suis sûr
que tu regardes ce
pdf à 23h la veille ^^

CHAPITRE IV : des charges électriques et leurs interactions

C. A. Coulomb (1736 - 1806) → Louis XVI - Napoléon
S. A. Nollet (1700 - 1770) → Louis XV

I) des charges élémentaires

des charges électriques sont dans les atomes



$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb}$$

La charge élémentaire est quantifiée
est invariante.

atomes → ions (+): cations → conducteurs électriques

↳ ions (-): anions → isolants

$$m_{\text{electron}} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_{\text{proton}} = 1836 \times m_e$$

} ⇒ charge ponctuelles

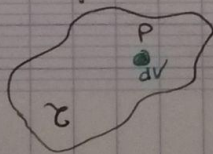
II) des distributions de charges

matière : $10^{22} \text{ at. cm}^{-3}$

⇒ bcp de charges dans la matière.

On ne décrit pas les charges une par une.

des objets chargés de volume $\mathcal{C}$:



densité de charge volumique $\rho [\text{cm}^{-3}]$

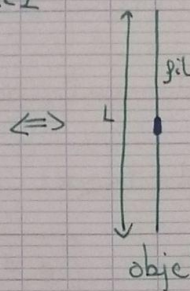
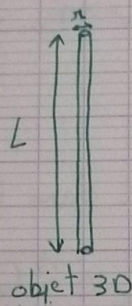
$$dq = \rho(P) \cdot dV$$

ρ dépend de la position
dans l'espace ⇒ champ de
scalaire.

Charge totale portée par l'objet Q :

$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho \cdot dV$$

⚠ On idéalise certains objets

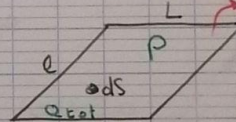
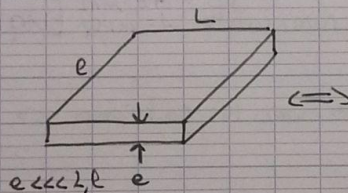


$$dq = \lambda(r) \cdot dl$$

densité de charges
par unité de longueur
 $\lambda [C \cdot m^{-1}]$

nanotube de carbone $\begin{cases} d \approx 1 \text{ nm} \\ L \approx 1 \text{ m} \end{cases}$

ADN $\begin{cases} 2 \text{ nm} = r \\ 1,34 \text{ m} = L \end{cases}$



graphène: plan atomique de carbone

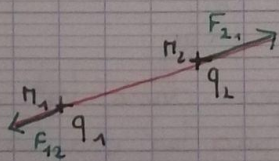
$$dq = \sigma(r) \cdot dS$$

densité de charges
par unité de surface $\sigma [C \cdot m^{-2}]$

$$Q_{tot} = \iint_S dq = \iint_S \sigma \cdot dS$$

III la loi de Coulomb

interaction entre 2 charges ponctuelles (forces)



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

$$\vec{F}_{21} = q_1 q_2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 \vec{r}_2\|^3}$$

ϵ_0 permittivité du vide

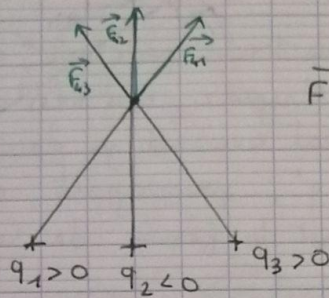
$N \cdot m \cdot C^{-2}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\|\vec{r}_1 \vec{r}_2\|^2} \cdot \vec{u}$$

21

2 charges de même signe se repoussent
 2 charges de signes opposés s'attirent

④ le principe de superposition



$$\vec{F}_4 = \vec{F}_{41} + \vec{F}_{42} + \vec{F}_{43}$$

$$\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ij}$$

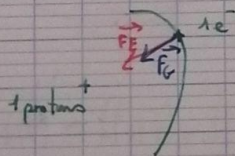
↑ somme vectorielle

⑤ des ordres de grandeurs

gravitation : $F_G = G \cdot \frac{m_1 m_2}{d^2}$ attraction

électrique : $F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{d^2}$ { attraction
repulsion

atome H :



$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q_1 q_2}{G \cdot m_1 m_2} \approx 2,3 \cdot 10^{39}$$

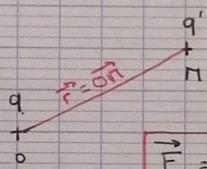
$\uparrow$ $\uparrow$
 m_e $1836 m_e$

CHAPITRE V de champ électrique $\vec{E}$ (v/m)

① Définition champ $\vec{E}$ crée par une charge ponctuelle q

Une charge électrique ponctuelle q , même dans le vide, modifie TOUT l'espace qui l'entoure.

La preuve est que si je place une deuxième charge ponctuelle q' , quelque part dans l'espace, cette charge subit la force de Coulomb.

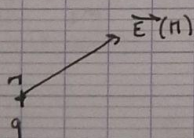


$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

syst. de coordonnées sphériques:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r$$

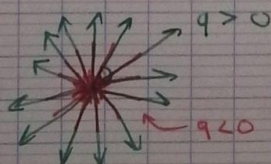


$$\vec{E}(r)$$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

$$\left(\frac{C \cdot V}{m} = N \right) \leftarrow \text{dim}$$

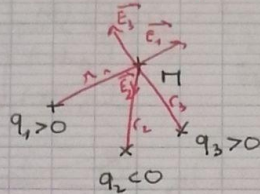
lignes de champ sont des droites sécantes en 0



23

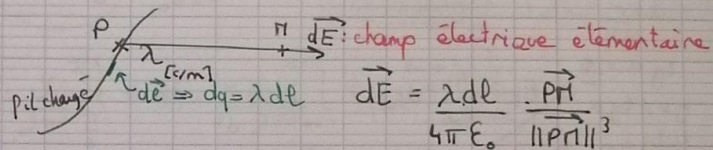
II) de champ électrique généré par une distribution de charges.

a) charges ponctuelles



$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

⚠ somme de vecteurs

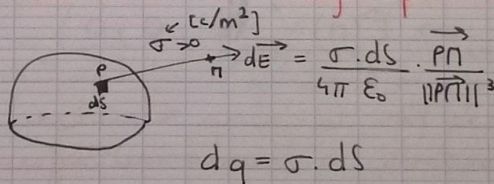


$$d\vec{E} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

$$\vec{E}_{fil} = \int_{fil} d\vec{E} = \int_{fil} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} dl$$

⚠ intégrale de vecteurs
3 intégrales.

c) distribution de charges ponctuelle (2D)



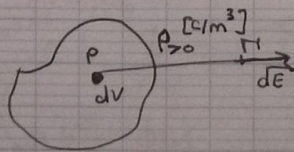
$$d\vec{E} = \frac{\sigma \cdot dS}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

$$dq = \sigma \cdot dS$$

$$\vec{E}(M) = \iint_S d\vec{E} = \iint_S \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot dS$$

⚠ somme vectorielle
intégrales donc 3
intégrales doubles.

d) distribution de charges volumiques



$$dq = \rho \cdot dV$$

$$d\vec{E} = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

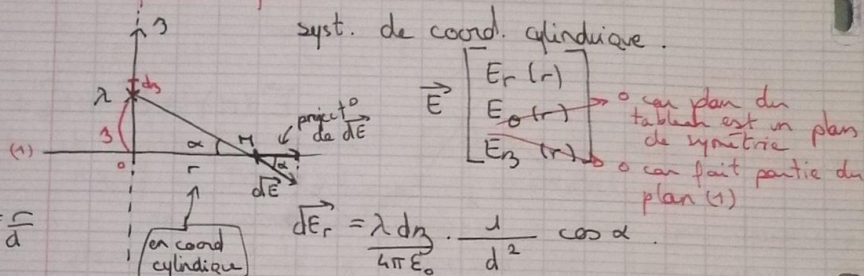
$$\vec{E}(M) = \iiint_V d\vec{E} = \iiint_V \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \cdot dV$$

⚠ 3 intégrales à calculer.

24

III) Champ électrique généré par le fil rectiligne uniforme infini

syst. de coord. cylindrique.



$$\cos \alpha = \frac{r}{d}$$

$$d = \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{z}{r}$$

$$z = r \tan \alpha$$

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{r}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow dz = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$d\vec{E}_r = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d^2} \cos \alpha$$

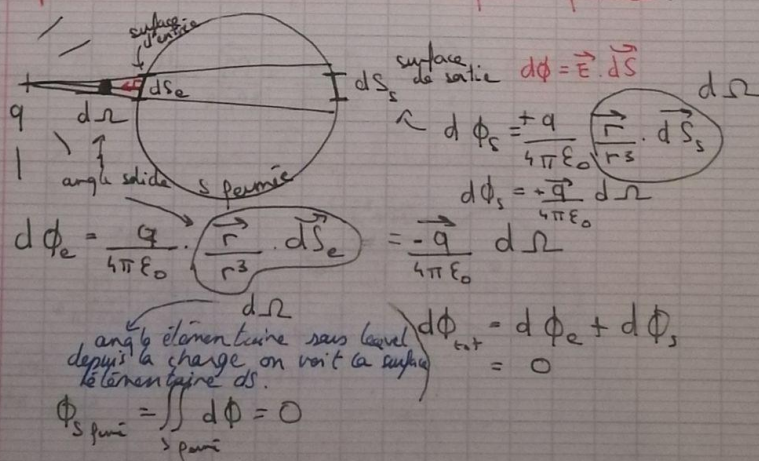
$$E_r = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 d^2} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} \cdot \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha}{r} d\alpha$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\sin \alpha \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} ; 0 ; 0 \right)$$

IV) Le flux du champ électrique généré par une charge ponctuelle à travers une surface fermée.

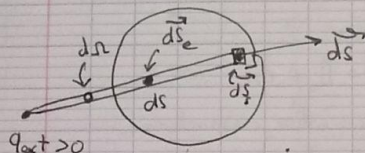


25

charge à l'intérieur :

$$d\phi = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega$$

$$\phi_{s_{\text{fermée}}} = \iint_{s_{\text{fermée}}} d\phi = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi\epsilon_0} \iint_{s_{\text{fermée}}} d\Omega = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \xrightarrow{4\pi}$$



$$d\phi_e = -\frac{q_{\text{ext}}}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega$$

$$d\phi_s = +\frac{q_{\text{ext}}}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

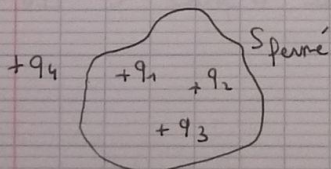
$$d\phi = d\phi_e + d\phi_s = 0 \quad \phi_{s_{\text{fermée}}} = \iint_{s_{\text{fermée}}} d\phi = 0$$

Théorème de Gauss "intégral"

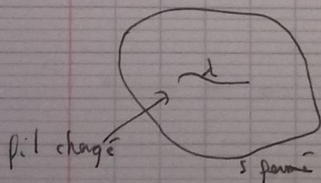
Le flux du champ électrique à travers toutes surfaces fermées est égal à la somme algébrique des charges intérieures à cette surface divisée par ϵ_0 .

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \left| \begin{array}{l} \text{les charges situées à l'extérieur} \\ \text{génèrent un flux nul.} \end{array} \right.$$

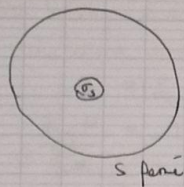
Charges ponctuelles



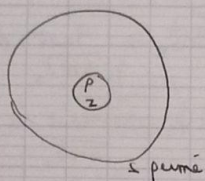
$$\phi_{s_{\text{fermée}}} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\epsilon_0}$$



$$\phi_{s_{\text{fermée}}} = \frac{\int \lambda \cdot d\ell}{\epsilon_0}$$



$$\Phi_{S_{\text{fermé}}} = \frac{\iint_S \sigma \cdot dS}{\epsilon_0}$$



$$\Phi_{S_{\text{fermé}}} = \frac{\iint_S \rho \cdot dV}{\epsilon_0}$$

* A quoi sert le théorème de Gauss

$$\iint_{S_{\text{fermé}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{on en déduit } \vec{E}(r)$$

- trouver la "bonne" surface fermée qui permet de calculer le flux ϕ sans trop se fatiguer.
- invariances + symétries $\rightarrow$ $\odot$ orientat°.
- $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E ds$ si $\vec{E} \parallel d\vec{S}$
- $\vec{E} \perp d\vec{S}$ alors $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$
- si en tout point de $S_{\text{fermé}}$ $E = \text{cte}$ $\Phi_e = E \cdot S$

CHAPITRE VI

de potentiel électrique V (volts)

(I) Définition du potentiel créé par une charge ponctuelle q

$0 \quad \vec{r} = \vec{OP} \quad P$
 $q > 0 \quad \vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = \begin{bmatrix} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{rot } \vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial E_\phi}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\theta) - \frac{\partial E_\rho}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

ici : $\text{rot } \vec{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$

$\vec{E} = -\text{grad } V$

$$-\text{grad } V = \begin{bmatrix} -\frac{\partial V}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow V \text{ ne dépend pas de } \theta. \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow V \text{ ne dépend pas de } \phi. \\ \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{cases}$$

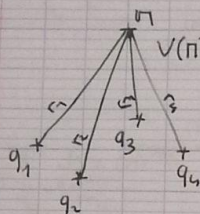
$$\Rightarrow V(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cst}$$

^ d'intégrat° d'ai diff de potentiel utile.

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow V(r) \rightarrow 0 \rightarrow \text{cst} = 0$$

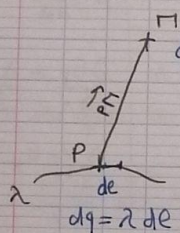
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

I Potentiel électrique généré par des distributions de charges.



$$V(M) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_3} + \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0 r_4}$$

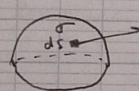
scalaires $\Rightarrow$ somme arithmétique
c'est simple putain!!!!



$$dV(M) = \frac{\lambda de}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow V(M) = \int dV = \int \frac{\lambda de}{4\pi\epsilon_0 r}$$

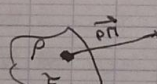
$dq = \lambda de$



$$dV(M) = \frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$dq = \sigma ds$$

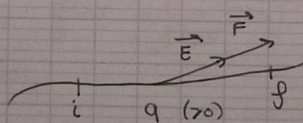
$$V(M) = \iint_S dV = \iint_S \frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_0 r}$$



$$dV = \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V(M) = \iiint_V \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r}$$

III de travail de la force électrostatique de Coulomb



$$W_{i \rightarrow j} = \int_i^j \vec{F} \cdot d\vec{e} = \int_i^j q \vec{E} \cdot d\vec{e} = -q \int_i^j \vec{\nabla} V \cdot d\vec{e}$$

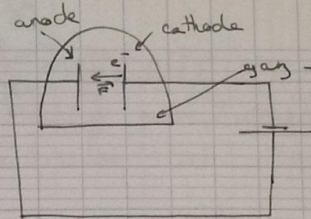
$$= -q \int_i^j dV$$

$$= -q (V_j - V_i)$$

$$= q (V_i - V_j)$$

29

glow discharge
like an arc discharge.



gas → plasma car ionisé.

e^- vont de la cathode vers l'anode.

$$W = -e(V_c - V_A)$$

$$W = e(V_A - V_c)$$

→ énergie $\overbrace{>0}^{\text{cédée}}$ aux électrons

CHAPITRE VII

des équations LOCALES du champ $\vec{E}$ et du potentiel V

VII. 1 de $\vec{E}$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} ; \vec{E} = -\text{grad } V$$

Thm de Gauss + Thm de Green-Ostrogradsky

$\rho (\text{C.m}^{-3})$
 z : volume
← sphère

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d\tau$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{E} \cdot d\tau$$

$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

⚠ si au point M , $\rho(M) = 0$, l'équation donnant $\text{div } \vec{E}(M) = 0$

↗ forme locale du thm de Gauss

VII. 2 de V

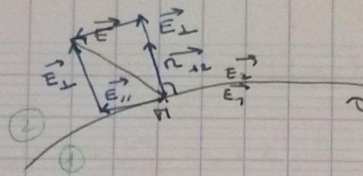
$$\vec{E} = -\text{grad } V ; \text{div grad } V = \frac{-\rho}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = \Delta V$$

$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

équation de Poisson

⚠ si au point M $\rho(M) = 0$
 équation de Poisson : $\Delta V = 0 \Leftrightarrow$ équation de Laplace

31



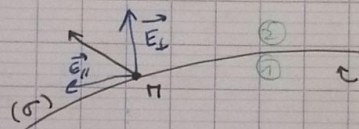
objet chargé en volume.

$$\vec{E}_1(M) + \vec{E}_{1n}(M) \quad \text{càd} \quad \lim \text{à droite} = \lim \text{à gauche} \Rightarrow \text{continuité de } \vec{E} \text{ lorsqu'il traverse la surface}$$

$$\vec{E}_1(M) = \vec{E}_2(M) \Leftrightarrow \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \vec{0}$$

Le champ $\vec{E}$ est continu.

$$\vec{E}_{1\perp} = \vec{E}_{2\perp} ; \vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel} ; V_1 = V_2 \text{ (potentiel continu)}$$



objet chargé en surface

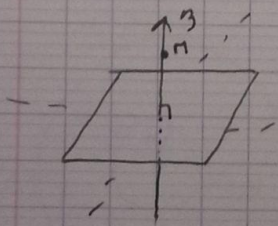
⚠ Il y a discontinuité de la composante normale du champ $\vec{E}$

Discontinuité : $E_{1\perp} \neq E_{2\perp}$

$$E_{2\perp} - E_{1\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{) valeur de la discontinuité}$$



Le potentiel, lui, EST TOUJOURS CONTINU
le champ est saillant continu sauf quand on traverse une surface chargée uniformément en surface



$$\vec{E} = E_x(z)\vec{e}_x + E_y(z)\vec{e}_y + E_z(z)\vec{e}_z \quad \text{par invariance}$$

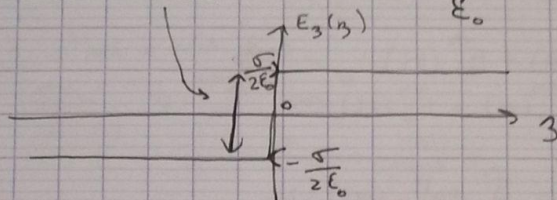
$$z > 0 : \text{div } \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_z(z)}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow E_z(z) = C_2 \in \mathbb{R}$$

$$z < 0 : E_z(z) = -C_2$$

32 $E_z(z) = -E_z(-z)$

discontinuité : $C_2 + C_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Leftrightarrow C_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$



VII.4 des différentes méthodes pour calculer le champ $\vec{E}$

① Calcul direct

$$dq = \int \lambda$$

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{E} = \iiint \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} d\vec{r}$$

② Par l'utilisation du théorème de Gauss

↳ trouver la "bonne" surface fermée.

③ Recherche $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ + relations de continuité.

④ On calcule V puis $\vec{E} = -\text{grad } V$

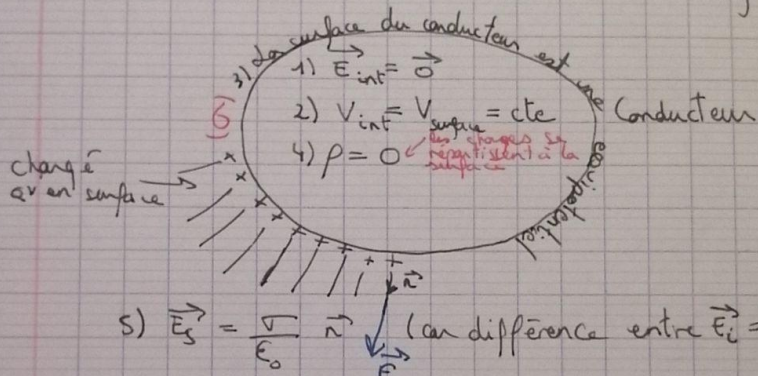
CHAPITRE ultime (ok c'est le 2) LES CONDUCTEURS

VIII.1 Conducteur à l'équilibre électrostatique

Si ce conducteur n'est parcouru par aucun courant électrique.

les charges sont IMMOBILES. $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$

Comment ce conducteur va-t-il se charger ?



6) la pression $\vec{F} = P_e$ électrostatique
la surface du conducteur chargée est soumise
à une tension électrostatique
↳ explosion COULOMBIENNE

$$P_e = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

$$\Rightarrow E_r(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\Rightarrow V_{\text{ext}}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

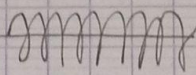
$$\Rightarrow V_s = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow E_s = \frac{V_s}{R}$$

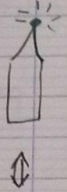
$$Q_{\text{surface}} = E_r(r) \cdot 4\pi r^2 = \sum \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{\text{ext}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow E_s = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

34 conducteurs creux se comporte comme un conducteur plein



cable renforcé
 ⇒ cage de Faraday
 ⇒ protéger du "bruit" extérieur



conducteur pointu.
 ⇒ effet de pointe.
 ⇒ le champ à la surface de la petite surface au bout de la pointe est énorme ⇒ ionise l'air

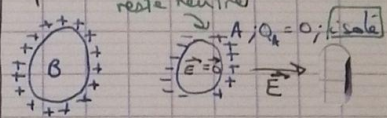
$V = V_1 = V_2$ la pointe

$$E_1 = \frac{V_1}{R_1}$$

$$E_2 = \frac{V_2}{R_2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

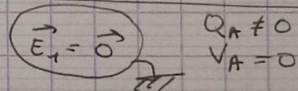
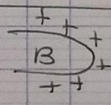
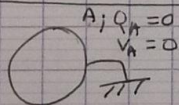
d'influence électrostatique

sans contact physique
 2 conducteurs chargés à proximité s'influencent



d'influence électrostatique est mutuelle, réciproque, réversible

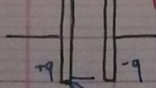
donc si on influence un conducteur isolé, il modifie la répartition de ses charges en surface ⇒ son potentiel change mais sa charge totale reste constante



donc si on influence un conducteur relié, il emprunte des charges à ce générateur ⇒ son potentiel est constant et sa charge totale change.

des condensateurs l'influence est totale si le conducteur influençant entoure complètement le conducteur influencé.

condensateur plan



surface: S
 densité de charge: $-\frac{q}{S}$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{S\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{d}$$

$$\vec{E} = -\text{grad} V$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$\Rightarrow V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x + \text{cte}$
 condensateur plan