ENSEMBLES CONNUS

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ entiers naturels

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ entiers relatifs

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid (p, q) \in (\mathbb{Z}^2)^*\}$ rationnels

$\mathbb{R}$ = réels

$\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ complexe $(i^2 = -1)$

↳ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

SOUS ENSEMBLES :

$\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}$

$\mathbb{R}_- = \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}, x \leqslant 0\}$

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

...

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

$n!$ ("factorielle n") : $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$

$\boxed{0! = 1}$

assertion = proposition logique

↳ vrai ou faux (like boolean)

Math. 0 Semestre 1

négation de P : "non (P)"

si P vrai, non(P) faux
si P faux, non(P) vrai

EQUIVALENCE : "$P \Leftrightarrow Q$"

si P vrai, Q vrai
si P faux, Q faux
si Q vrai, P vrai
si Q faux, P faux
} $P \Leftrightarrow Q$ vrai

on dit "P ssi Q"

$\boxed{P \Leftrightarrow \text{non (non P) vrai}}$

CONJONCTION : "P et Q" ou "$P \wedge Q$"

(P et Q) vrai ssi les deux sont vrai

DISJONCTION : "P ou Q" ou "$P \vee Q$"

(P ou Q) vrai ssi l'un des deux au moin est vrai.
(P ou Q) faux ssi les deux sont faux.

Loi de Morgan
NON (P et Q) ⇔ NON(P) OU NON(Q) vrai
"Terminale : $\overline{P.Q} \Leftrightarrow \overline{P} + \overline{Q}$"

NON (P ou Q) ⇔ NON(P) ET NON(Q) vrai
"Terminale : $\overline{P+Q} \Leftrightarrow \overline{P}.\overline{Q}$"

P et non(P) fausse "$\forall P$"
P ou non(P) vrai "$\forall P$"

ET et OU commutatifs
- P et Q ⇔ Q et P
- P ou Q ⇔ Q ou P

ASSOCIATIVITE :

P ou (Q ou R) $\Leftrightarrow$ P ou Q ou R vrai

P et (Q et R) $\Leftrightarrow$ P et Q et R vrai

DISTRIBUTIVITE :

P et (Q ou R) $\Leftrightarrow$ (P et Q) ou (P et R) vrai

P ou (Q et R) $\Leftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R) vrai

Implication :

$\boxed{(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{NON}(P) \text{ ou } Q)}$

CONTRAPOSE :

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \underbrace{(\text{NON}(Q) \Rightarrow \text{NON}(P))}_{\text{contraposé de } P \Rightarrow Q}$

Transitivité :

$[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Transitivité de l'équivalence :

$[(P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$

quantificateurs :

$\forall$: "quelquesoit";

$\exists$: "il existe";

$\exists!$: "il existe un unique"

NEGATION DE QUANTIFICATEURS :

$\text{NON}[(\forall x \in E)(P(x))] \Leftrightarrow (\exists x \in E)[\text{NON}(P(x))]$

$\text{NON}[(\exists x \in E)(P(x))] \Leftrightarrow (\forall x \in E)[\text{NON}(P(x))]$

DISTRIBUTIVITE :

$(\exists x \in E)[A(x) \text{ OU } B(x)]$
$\Leftrightarrow [(\exists x \in E)(A(x))] \text{ OU } [(\exists x \in E)(B(x))]$
pareil pour $\forall$.

$$\left.\begin{array}{l}(P \text{ ET Vrai}) \Leftrightarrow P \\ (P \text{ OU Vrai}) \Leftrightarrow \text{Vrai} \\ (P \text{ ET Faux}) \Leftrightarrow \text{Faux} \\ (P \text{ OU Faux}) \Leftrightarrow P\end{array}\right\} \text{évident.}$$

$(P \text{ ET } Q) \Rightarrow P$
$P \Rightarrow (P \text{ OU } Q)$

CONTRE EXEMPLE :

Pour montrer : $(\forall x \in E)(P(x))$ faux
il faut montrer : $(\exists x \in E)(\text{NON}(P(x)))$ vraie

DISJONCTION DE CAS :

pour 2 cas : $[(P \text{ OU } Q) \text{ ET } (P \Rightarrow R) \text{ ET } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow R$
"2 possibilité, si les 2 donnent le résultat alors le résultat est vrai".

pour 3 cas : $[(P \text{ ou } Q \text{ ou } H) \text{ et } (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \text{ et } (H \Rightarrow R)] \Rightarrow R$

...

RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

on sait que P est vrai et pour le prouver, on suppose NON(P) en aboutissant à une absurdité.
$[\text{NON}(P) \Leftrightarrow \text{faux}] \Rightarrow [P \Leftrightarrow \text{Vraie}]$

E est inclu dans A : $E \subset A$

$(\exists x \in E)(x \notin A) \Rightarrow E \not\subset A$

$E \subset A$: " E est une partie ou sous ensemble de A "

E et F des sous ensemble de A et $E \subset F$
$\Leftrightarrow (\forall x \in A)(x \in E \Rightarrow x \in F)$

$1 \in \mathbb{N} \quad \neq \quad \{1\} \subset \mathbb{N}$

"1 est un élément de $\mathbb{N}$" | "$\{1\}$ est un sous ensemble de $\mathbb{N}$".

$(E \subset F \text{ et } F \subset E) \Rightarrow (E = F)$

$[(A \subset B) \text{ et } (B \subset C)] \Rightarrow (A \subset C)$ transitivité

$[(A = B) \text{ et } (B = C)] \Rightarrow (A = C)$

COMPLEMENTAIRES :

$A^c = \overline{A} = C_E A = \{x \in E,\ x \notin A\}$

(avec $A \subset E$) $\quad (A^c)^c = A \,;\, (A \subset B) \Rightarrow (B^c \subset A^c)$

$\emptyset = C_E E \qquad \emptyset = \{\}$

$A \cap B = \{x \in E, (x \in A) \text{ et } (x \in B)\}$ intersection

$A \cup B = \{x \in E, (x \in A) \text{ ou } (x \in B)\}$ union

$A \cap \overline{B} = A \setminus B = \{x \in E, (x \in A) \text{ et } (x \notin B)\}$ différence

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ différence symétrique

$A \cup \emptyset = A \,;\, A \cap \emptyset = \emptyset \,;\, A \cup C_E A = E \,;\, A \cap C_E A = \emptyset$

$X \in P(E) \Leftrightarrow X \subset E$ ex $\begin{cases} E = \{2,3,4\} \\ P(E) = \{\emptyset, E, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{2,4\}\} \end{cases}$

$A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$
(commutatif)

$A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
$A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ (associatif)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité)

PRODUIT CARTESIEN :

$E \times F = \{(x, y), (x \in E) \text{ et } (y \in F)\}$

ex : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}$

$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}$

$x \in \prod_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I}, \forall i \in I, x_i \in A_i\}$

Partition d'un ensemble :

$\Pi = (A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E

$(A_i)_{i \in I}$ partit° de E

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in I, A_i \neq \emptyset \\ \forall (i, j) \in I^2, (i \neq j) \Rightarrow (A_i \cap A_j \neq \emptyset) \\ \bigcup_{i \in I} A_i = E \end{cases}$$

Math. 0 Semestre 1

base

$$f : E \to F$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

f : fonction ; E : ensemble de départ ; F : ensemble d'arrivé ; y : image de x par f ; x : antécédent de y par f.

Domaine de définition (D_f) :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \in E \text{ et } \exists y \in F,\ y = f(x)$$

Si $D_f = E$, f est une application
↳ $(\forall x \in E)(\exists! y \in F)(y = f(x))$.

application identité : Id_E

$$Id_E : E \to E$$
$$x \mapsto x = Id_E(x)$$

application nulle : $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto 0$$

Deux applications égales

$\Leftrightarrow$
- $\hat{m}$ ensemble de départ
- $\hat{m}$ ensemble d'arrivé
- $\hat{m}$ graphe.

Restriction de f à $A \Leftrightarrow f_{|A}(x)$

$$f_{|A} : A \to F$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Prolongement de f à $C \Leftrightarrow \hat{f}_{|C}(x)$

$$\hat{f}_{|C} : C \to F \quad (E \subset C)$$
$$x \mapsto \begin{cases} y = f(x) & \text{si } x \in E \\ \text{ce qu'on veut} & \text{si } x \notin E \text{ et } x \in C \end{cases}$$

$\exists$ une infinité de $\hat{f}_{|C}$

composé de f et $g \Leftrightarrow g \circ f(x) = g(f(x))$

$f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$ évident

Image directe : $f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$

Image réciproque : $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \subset E$

$Im\, f = f(E)$ à ne pas confondre à F

$Im\, f = F \Leftrightarrow f$ surjectif

$A \subset E$, $f(A) \subset A \Rightarrow A$ stable

$\underbrace{(A, A') \subset E^2}$, $\underbrace{(B, B') \subset F^2}$

↳ $f(\emptyset) = \emptyset$ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

↳ $A \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \neq 0$

↳ $A \subset A' \Rightarrow F(A) \subset F(A')$

↳ $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$

Injectif : $\forall x \in E$, max 1 anté dans F

$(\forall (x, x') \in E^2)(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.

Surjectif : $\forall x \in E$, min 1 anté dans F

- $(\forall y \in F)(\exists x \in E)(y = f(x))$
- $Im\, f = F$

bijectif : injectif + surjectif : $\forall x \in E$, 1 anté dans F

$(\forall y \in F)(\exists!\, x \in E)(y = f(x))$.

g et f surjective : $g \circ f$ et $f \circ g$ surjective.

g et f injective : $g \circ f$ et $f \circ g$ injective.

g et f bijective : $g \circ f$ et $f \circ g$ bijective.

f bijective $\Rightarrow f \circ f^{-1} = Id_F = f^{-1} \circ f$

f bijective $\Rightarrow f^{-1}$ bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$

$g \circ f = Id_E \Leftrightarrow f$ injective et g surjective

$g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F \Leftrightarrow$ (f et g bijective et réciproque l'une de l'autre)

Math. 0 Semestre 1

F : partie non vide de $\mathbb{R}$, $(m, M) \in \mathbb{R}^2$

$(\forall x \in F)(m \leq x) \Rightarrow m$ minorant de F

$(\forall x \in F)(x \leq M) \Rightarrow M$ majorant de F

$\exists$ minorant $\Rightarrow$ F minorée

$\exists$ majorant $\Rightarrow$ F majorée

$\exists$ majorant et $\exists$ minorant $\Rightarrow$ F bornée

plus petit élément de F :

$m \in F$ et $(\forall x \in F)(m \leq x)$

(minorant appartenant à F)

plus grand élément de F :

$M \in F$ et $(\forall x \in F)(x \leq M)$

(majorant appartenant à F)

$\min F$ = unique plus petit élément de F.

$\max F$ = unique plus grand élément de F.

$\inf F$ = plus grand minorant

↳ si $\inf F \in F$, $\inf F = \min F$

$\sup F$ = plus petit majorant

↳ si $\sup F \in F$, $\sup F = \max F$

$U_{n+2} + pU_{n+1} + qU_n = 0 \quad p^2 - 4q \geqslant 0$

↳ $r_1 \neq r_2 \Rightarrow (\alpha r_1^n + \beta r_2^n)_{n \in \mathbb{N}} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

↳ $r_1 = r_2 \Rightarrow (r_1^n(\alpha + \beta n))_{n \in \mathbb{N}} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R}$

φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$

* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée :

$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(U_n \leq M)$

* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée :

$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{R})(U_n \geq m)$

* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée :

$(\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2)(\forall n \in \mathbb{N})(m \leq U_n \leq M)$

ou

$(\exists K \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N})(|U_n| \leq K)$

Math.0 Semestre 1

toutes suites extraite d'une suite bornée est bornée

$(\exists \ell \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |U_n - \ell| \leq \varepsilon)$
$\Leftrightarrow$ suite convergente.

$(\forall \ell \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\exists p_{n,\varepsilon} \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(p_{n,\varepsilon} \geq n \text{ et } |U_{p_{n,\varepsilon}} - \ell| > \varepsilon)$
$\Leftrightarrow$ suite divergente.

Suite divergente vers $+\infty$ si :

$(\forall A > 0)(\exists n_A \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_A \Rightarrow U_n \geq A)$

Suite divergente vers $-\infty$ si :

$(\forall A > 0)(\exists n_A \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_A \Rightarrow U_n \leq -A)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \pm\infty \Rightarrow$ divergente (réciproque fausse)

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers ℓ $\Rightarrow$ toute suite extraite cv vers ℓ.

convergente $\Rightarrow$ borné (pour suite)

si toute les suites extraite cv vers ℓ, alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers ℓ.

lim indéterminé : $+\infty - \infty$; $0\times\infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; 1^{∞}

Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell'$

$[(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow U_n \leqslant V_n)] \Rightarrow \ell \leqslant \ell'$

$(\forall n\in\mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow U_n \leqslant V_n)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty \end{cases}$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n \leqslant V_n \leqslant W_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell$

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ borné et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers $0 \Rightarrow (U_nV_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers 0

croissant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n \leqslant U_{n+1}$
str. croissant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n < U_{n+1}$
décroissant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n \geqslant U_{n+1}$
str. décroissant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n > U_{n+1}$

monotone $\Rightarrow$ décroissant ou croissant
strictement monotone $\Rightarrow$ str (décroissant ou croissant)

croissant majoré $\Rightarrow$ cv

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

décroissant minoré $\Rightarrow$ cv

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell = \inf_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

$$\left.\begin{array}{l}(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ croissante}\\ (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\Rightarrow \text{adjacentes}\\ \Rightarrow \text{cv et m̂ limite.}\end{array}$$

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \searrow$ et cv vers $0 \Rightarrow U_n > 0$

Bolzano-Weierstrass :
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous suite convergente