Math. 1 Semestre 1

$\mathbb{C} = \{a+ib \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ $\qquad i^2 = -1$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

équa 2nd degrès : si $\Delta < 0$

dans $\mathbb{C}$: $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ Rm : $\overline{z_1} = z_2$ (racines conjuguées) pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

$\boxed{z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}}$ et $\boxed{z_1 z_2 = c/a}$

$Re(z)$: partie réel. Si $z \in \mathbb{R}$: $z = Re(z)$

$Im(z)$: partie imaginaire. Si $z \in i\mathbb{R}$: $z = Im(z)i$
$\iff$ imaginaire pur

$z = Re(z) + i\,Im(z)$

$\bar{z} = Re(z) - i\,Im(z)$ (conjugués)

$\bar{\bar{z}} = z$; $z + \bar{z} = 2Re(z)$; $z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$

$z\bar{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2 \in \mathbb{R}_+$

$\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \bar{z} \times \overline{z'}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \bar{z}^n$ $\qquad \overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\bar{z}}$

$z \in i\mathbb{R} \iff z + \bar{z} = 0$ et $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$

Quotient de complexe : on multiplie en haut et en bas par le conjugué du complexe au dénominateur :

$\dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ car $z\bar{z} = a^2 + b^2$

affixe de $\overrightarrow{AB}$ vaut $z_B - z_A$

$|z_1 z_2| = |z_1| . |z_2|$ $\qquad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

Cercle de centre O et de rayon 1 :

$C(O,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

forme trigonométrique : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$
avec $\theta = \operatorname{Arg}(z)$

et $\cos\theta = \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$

forme exponentielle : $z = |z| e^{i\theta}$

$e^{i\pi} = -1$; $e^{i\pi/2} = i$; $e^{i2\pi} = 1$

formule d'Euler :

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$

dérivé dans $\mathbb{C}$: $f'(x) = u'(x) + i v'(x)$

$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$

$\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = r e^{i\theta} \iff \left((\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) \equiv \theta\ [2\pi] \text{ et } \dfrac{CD}{AB} = r\right)$

$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Polynôme nul : $0_{\mathbb{K}[x]}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0_{\mathbb{K}[x]}(x) = 0$

tout les coeffs sont nuls

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les coefficients de P

degrés de P : $\deg(P)$ ou $d(P)$

↳ plus grande puissance de x

valuation de P : $\mathrm{val}(P)$ ou $v(P)$

↳ si $a_0 \neq 0$, $\mathrm{val}(P) = 0$

↳ la plus petite puissance de x

Terme constant de P (est pas multiplié par x)

$\underbrace{a_n}_{\text{coefficient du terme de plus haut degrés.}} = 1 \Rightarrow P$ est unitaire

$d(AB) = d(A) + d(B)$ $\qquad v(AB) = v(A) + v(B)$

$d(A+B) \leq \max\{d(A), d(B)\}$

$v(A+B) \geq \min\{v(A), v(B)\}$

A et B deux élément de $\mathbb{K}(x)$ et $B \neq 0_{\mathbb{K}(x)}$:

$\begin{cases} A = BQ + R \\ d(R) < d(B) \end{cases}$ division euclidienne de A par B $\exists! (Q, R) \in \mathbb{K}(x)^2$

Si $R = 0_{\mathbb{K}(x)}$, B divise $A \Leftrightarrow B \mid A$

Math. 1 Semestre 1

Méthode division euclidienne :

divisons $x^4 - 3x + 1$ par $x^2 + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
A(x) = x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 3x + 1 & x^2 + 1 \quad B(x) \\
\hline
-(x^4 + 0 + x^2 + 0 + 0) & x^2 - 1 \\
\hline
-x^2 - 3x + 1 & Q(x) \\
-(-x^2 + 0 - 1) & \\
\hline
-3x + 2 \quad R(x) &
\end{array}
$$

$x^4 + x^2 = \underbrace{(x^2 + 1)}_{B} \times \underbrace{x^2}_{Q}$

ça permet d'annuler les x^4.

α racine de $A \iff A(\alpha) = 0$

$\iff (x - \alpha)$ divise A

$F(\lambda y) = \lambda . F(y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$F(y_1 + y_2) = F(y_1) + F(y_2)$

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants :

$$\underbrace{a}\,y'(x) + b\,\underbrace{y(x)}_{\text{inconnu}} = \underbrace{f(x)}_{\text{second membre}} \quad (E)$$

$a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$
(coefficients)

Math. 1 Semestre 1

① On résoud l'équation homogène :
$f(x) = 0$
cad : $ay'(x) + by(x) = 0$

$\hookrightarrow \boxed{S_h = \{ x \longmapsto Ce^{-\frac{b}{a}x},\ C \in \mathbb{R} \}}$

② on cherche une solut° particulière de (E)

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$\Rightarrow$ On cherche une solut° particulière de $\boxed{f(x) = f_1(x)} \rightarrow S_{p1}$
puis une solut° particulière de $\boxed{f(x) = f_2(x)} \rightarrow S_{p2}$

$\underbrace{S_p = S_{p_1} + S_{p_2}}_{\text{principe de superposition}}$

Si $f(x) = P_n(x)\, e^{\mu x}$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\text{Si } \mu \neq \frac{-b}{a} \rightarrow S_p = \{x \mapsto Q_n(x)\, e^{\mu x}\}}$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\text{Si } \mu = \frac{-b}{a} \rightarrow S_p = \{x \mapsto x\, Q_n(x) e^{\mu x}\}}$

avec Q_n de la forme de $P_n(x)$
(de degrés n)

Si $f(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$
$(a, B, \alpha) \in \mathbb{R}^3$

$\hookrightarrow \boxed{S_p = \{x \mapsto D\cos(\alpha x) + E\sin(\alpha x)\}}$
avec $(D, E, \alpha) \in \mathbb{R}^3$

③ Solution générale :

$$S_g = S_h + S_p$$

④ condition initiale

$$y(x_0) = y_0$$

afin de trouver la constante C de l'équation homogène.

Résoudre une équation différentiel linéaire à coefficients constants d'ordre 2

$(E)\ ay'' + by' + cy = f(x)$

$a \in \mathbb{R}^*, (b, c) \in \mathbb{R}^2$

---

① Résoudre l'équation homogène

$(H) : ay'' + by' + cy = 0$

$\Leftrightarrow (E)$ avec $f(x) = 0$

ⓐ équa caractéristiques

$(R) : ar^2 + br + c = 0$

ⓑ Résoudre (R) dans $\mathbb{K}$

$\Delta \dots ; (r_1 ; r_2)$

ⓒ Solutions de (H)

- Si $\Delta = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$

$S_H = \{x \in \mathbb{R} \mapsto (C_1 + C_2 x)e^{rx}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$

$S_H = \{x \in \mathbb{R} \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$

- Si $\Delta < 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2 = \overline{r_1}, (r_1, r_2) \in \mathbb{C}^2$

$S_H = \{x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), r = \alpha + \beta i, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}$

ou

$S_H = \{x \in \mathbb{R} \mapsto K e^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi), r = \alpha + \beta i, K \in \mathbb{R}^+, \varphi \in \mathbb{R}\}$

② Chercher une solution particulière de (E)

Si $f(x) = P_n(x) e^{\mu x}$, $(\mu \in \mathbb{C}, \deg(P_n) = n)$

- Si μ pas racine de (R)

$$S_p = \{x \mapsto Q_n(x) e^{\mu x}, \mu \in \mathbb{C}, d(Q_n) = n\}$$

- Si μ racine simple de (R)

$$S_p = \{x \mapsto Q_n(x) x . e^{\mu x}, \mu \in \mathbb{C}, d(Q_n) = n\}$$

- Si μ racine double de (R)

$$S_p = \{x \mapsto Q_n(x) x^2 e^{\mu x}, \mu \in \mathbb{C}, d(Q_n) = n\}$$

Si $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

$\omega \in \mathbb{R}^*, (A,B) \in \mathbb{R}^2$

⚠ Uniquement si $b \neq 0$ et $\omega^2 = c/a$:

$$S_p = \{x \in \mathbb{R} \mapsto D\cos(\omega x) + E\sin(\omega x), (C,D) \in \mathbb{R}^2\}$$

Si $f(x) = m(x) + n(x)$

$$S_p = S_{p_m} + S_{p_n}$$

(principe de superposition)

③ Solutions générales

$$S_g = S_h + S_p$$

④ Conditions initiales

Math. 1 Semestre 1

Système rectangulaire à m équations et n inconnues :

$$\begin{cases} (Eq\ 1)\ a_{11} x_1 + \dots + a_{1} x_j + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ (Eq\ i)\ a_{i1} x_1 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{in} x_n = b_i \\ (Eq\ m)\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mj} x_j + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots x_n$: inconnues a_{ij} : coefficients b : second membre

second membre nul $\Leftrightarrow$ système homogène.

système linéaire carré
↳ nombre d'équations = nombre d'inconnues

infinité de solut° → inconnues de base en fonction des inconnues libres.

$\exists!$ solut° à un système carré
$\Leftrightarrow$ système inversible

déf. condition de compatibilité
= équation que doit vérifier le second membre pour que le système admette une solution.

ex. ex :
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \alpha \\ -2x_1 + x_2 = \beta \\ x_1 + x_2 = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = (\alpha/8) - (3\beta/8) \\ x_2 = (\alpha/4) + (\beta/4) \\ \boxed{\frac{3\alpha}{8} - \frac{\beta}{8} = \gamma} \end{cases}$$

conditions de compatibilité

si $\gamma \neq \frac{3\alpha}{8} - \frac{\beta}{8}$: $S = \emptyset$.

Éliminat° de Gauss
↳ triangulat° du système

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b_1 \\ \quad a_4 x_2 + a_5 x_3 = b_2 \\ \quad\quad a_6 x_3 = b_3 \end{cases}$$

on y arrive par combinaison grâce aux pivots

↳ puis on remonte le système.

pour les système rectangulaire, on étend Gauss mais il y a une infinité de solution → inconnues libres.

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } n \geqslant p \\ 0 & \text{si } n < p \end{cases}$$

n\p	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

construct°

a	b
	a+b

binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

linéarisation de $\cos^n \theta$ et $\sin^n \theta$:

$$\cos^m \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^m$$

$$\sin^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$$

Math. 1 Semestre 1

$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$.

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$$

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$$ (racines conjuguées si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$)

$P \in \mathbb{K}_n[x]$ et ℓ racine $> n$, alors $P = 0_{\mathbb{K}[x]}$

$z^n = Z$ $\quad z \in \mathbb{C}$ et $Z \in \mathbb{C}$

racine n-ème $\quad Z = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$Z = Re^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$ ($R > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$)

$z_k = R^{1/n} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$

il y a n racine n-ème.

α racine de $P \in \mathbb{K}[x] \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$

$P(x) = (x-\alpha)^k Q(x) \Rightarrow \alpha$ racine d'ordre k

↳ $k = 0 \Rightarrow$ pas racine

↳ $k = 1 \Rightarrow$ racine simple

↳ $k = 2 \Rightarrow$ racine double

α racine d'ordre $k \Leftrightarrow P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{k}(\alpha) \neq 0$ ← nb de dérivée

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{n} r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \prod_{i=0}^{n} r_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{array}\right\}$$ Pour : $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

$\alpha \in \mathbb{C}$ racine $\Rightarrow \bar{\alpha}$ racine

- $\deg(P \in \mathbb{C}[x]) \geq 2 \Rightarrow$ A est réductible
- $\deg(P \in \mathbb{R}[x]) = 2 \Rightarrow$ [A irréductible $\Leftrightarrow$ pas de racine $\mathbb{R}$] 10
- $\deg P = n \geq 0 \Rightarrow$ max n racines
- $\deg P \geq 1 \Rightarrow$ min 1 racine

$P \in \mathbb{K}[x]$:

P scindé $\Leftrightarrow \left[\exists (\lambda, \alpha_1, \dots \alpha_\ell) \in \mathbb{K}^{\ell+1}\right.$ et $\left.\exists (k_1, \dots, k_\ell) \in \mathbb{N}^\ell\right]\left[P(x) = \lambda (x-\alpha_1)^{k_1} \dots (x-\alpha_\ell)^{k_\ell}\right]$

Linéarité de l'opérateur somme :

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Changement d'indice :

$$\sum_{k=p}^{n} a_{k+m} = \sum_{j=p+m}^{n+m} a_j$$

simplification téléscopique :

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$$

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Somme des termes d'une suite géo. :

$$S_n = 1 + q + q^1 + q^2 + \dots + q^n$$
$$= 1 + q(1 + q + q^2 \dots + q^{n-1})$$
$$= 1 + q(S_n - q^n)$$
$$S_n = 1 + q S_n - q^{n+1}$$
$$-qS_n + S_n = 1 - q^{n+1}$$
$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$$
$$\boxed{S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Math 1 - Semestre 1

Si 1^{er} termes :

$$\boxed{S_n = 1^{er}\text{ terme} \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Si $q = 1$:

$$S_n = 1^0 + 1^1 + \dots + 1^n$$
$$= (n+1) \times 1$$
$$\boxed{S_n = n + 1}$$

f convexe $\Rightarrow f'' > 0$

f concave $\Rightarrow f'' < 0$

$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$

$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

$\mathbb{K}(x) = \left\{ \frac{P}{Q}, (P,Q) \in (\mathbb{K}[x])^2, Q \neq 0_{\mathbb{K}[x]} \right\}$

Les racines aux dénominateur sont appelés pôles.

div eucl. $\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{EQ+R}{Q} = E + \frac{R}{Q}$

$D_F = \mathbb{K} \setminus \{\text{pôles dans } \mathbb{K}\}$

élément simple : $F = \frac{A}{Q^k}$ $\quad d(A) < d(Q)$

Q ← irréductible

dans $\mathbb{C}$: $A = a$ $\quad (a, \alpha) \in \mathbb{C}^2$
$Q = x - \alpha$

dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} A = ax + b \\ B = x^2 + px + q \end{cases}$ $\quad (a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4$

ou

$\begin{cases} A = a \\ B = x - \alpha \end{cases}$ $\quad (a, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ et $p^2 - 4q < 0$

<u>pour trouver les coeffs</u> :

- parité : $\begin{cases} F(x) = F(-x) & \text{si } F \text{ pair} \\ F(-x) = -F(x) & \text{si } F \text{ impair} \end{cases}$

- méthode du cache :

soit $F(x) = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^k Q_1(x)} = \frac{a_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{a_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} \dots$

$(x-\alpha)^k F(x) \Rightarrow a_k = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$

Math 1 - Semestre 1

- méthode de la limite :

$$\lim_{x \to +\infty} xF(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} x^2 F(x)$$

- valeurs particulières :
  on prend des valeurs particulières de x
  (différentes des pôles ⚠).

dans l'ordre :

- vérifier que la fraction est irréductible
- calculer la partie entière de la fraction
- factoriser le dénominateur dans $\mathbb{C}[x]$ ou $\mathbb{R}[x]$
- déterminer le nombre d'élément simple.
- écrire leur somme
- enfin : TROUVER LES COEFFS !

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

I intervalle $\Leftrightarrow (\forall (a,b) \in I^2)(a \leq b \Rightarrow [a,b] \subset I)$

7.3 p. 99

intervalle minimal : $\emptyset$
intervalle maximal : $\mathbb{R}$
intervalle fermés non bornés : $]-\infty ; a]$ ou inverse
intervalle ouverts non bornés : $]-\infty ; a[$ ou inverse
intervalles fermés bornés : $[a;b]$
intervalles ouvert bornés : $]a;b[$
intervalles bornés semi-ouverts : $[a;b[$ ou inverse

notion de voisinage :

$]a-\varepsilon ; a+\varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}$
(intervalle ouvert de centre a et rayon ε)

V est un voisinage du point A ou $V \in \mathcal{V}(a)$
si $(\exists \varepsilon > 0)(]a-\varepsilon ; a+\varepsilon[\subset V)$

$\mathcal{V}(a)$: ensemble des voisinage de a.

droite achevée $= \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\} = [-\infty ; +\infty]$

* Limite :

$$\overbrace{}^{x \text{ proche de } a}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x \in D_f)(\overbrace{0 < |x-a| \leq \eta}^{x \text{ proche de } a} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - \ell| \leq \varepsilon}_{f(x) \text{ proche de } \ell .})$$

f au voisinage de $+\infty$ tend vers ℓ

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f)(x \in [A ; +\infty[\Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

f au voisinage de $-\infty$ tend vers ℓ

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f)(x \in]-\infty ; A] \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

$f \to +\infty$

$$(\forall A \in \mathbb{R})(\exists B \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f)(x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A)$$

$f \to -\infty$

$$(\forall A \in \mathbb{R})(\exists B \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f)(x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A)$$

FI : $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $\frac{0}{0}$; $+\infty - \infty$; $-\infty \times +\infty$;
$1^{\pm\infty}$; $+\infty^0$; 0^0

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (f/g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) / \lim_{x \to a} g(x)$$ sauf si denom $\to 0$ / $+\infty$

$$\lim_{x \to a} |g(x)| = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to a} |g(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \left|\frac{1}{g(x)}\right| = +\infty$$

$f(x)^{g(x)} = e^{g(x).\ln(f(x))}$ → permet de lever FI

thm des gendarmes : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ borné} \\ g \to 0 \end{array}\right\}$ au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} (gf)(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

continue en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$C^0 \Rightarrow$ continue sur I

$C^1 \Rightarrow$ continue et dérivé continue sur I.

$C^p \Rightarrow f^{(p)}$ existe et est continue

$C^\infty \Rightarrow$ dérivable à l'infini. f et ses dérivées sont continues.

taux d'accroissement :

$$t_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

f dérivable si t_a admet une limite finie en a.

dérivable à droite ou à gauche en a.
↳ si les deux ⇒ dérivable en a.

f dérivable en a ⇒ f continue en a.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{sur : } I \setminus \{x, g(x)=0\}$$

$$(\lambda f + g)'(x) = \lambda f'(x) + g'(x)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2} \quad \text{sur : } I \setminus \{x, f(x)=0\}$$

sous réserve de dérivabilité

f dérivable sur I et g dérivable sur J

$\Rightarrow (g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$

$\Rightarrow g \circ f$ dérivable sur I.

$f^{(0)}(a) = f(a)$, $f^{(1)}(a) = f'(a)$ ...

$f^{(p)}(a)$ est la dérivé d'ordre p de f en a.

f et g de classe C^p sur I et h de classe C^p sur J

$f(I) \subset J$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$(\lambda f + g)$ C^p sur I

(fg) C^p sur I et $(fg)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} f^{k} \cdot g^{p-k}$

$(h \circ f)$ C^p sur I

si $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)$ C^p sur I

<u>injectif</u> : $(\forall (x, x') \in E^2)(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

<u>surjectif</u> : $(\forall y \in F)(\exists x \in E)(y = f(x))$

<u>bijectif</u> : $(\forall y \in F)(\exists! x \in E)(y = f(x))$

Restriction du domaine d'étude :

paire : sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) = -f(x)$
impaire : sur $\mathbb{R}_+$ et $f(-x) = -f(x)$
T-périodique : sur T.
$\hookrightarrow \Leftrightarrow \forall x \in D_f, \begin{cases} (x \pm T) \in D_f \\ f(x+T) = f(x-T) = f(x) \end{cases}$

C_f et C_g asymptote $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) - g(x) = 0$
$\downarrow$
au voisinage de a

convexe : $f''(x) \geq 0$
concave : $f''(x) \leq 0$

Young : $\forall (a,b,\varepsilon) \in \mathbb{R}^3, ab \leq \varepsilon \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2\varepsilon}$

$\forall (p,q) \in \{(p,q) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\}$,
$\forall a > 0, \forall b > 0, ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = e'(0) = 1$

CROISSANCES COMPARÉS

croissance $\underline{\ln}$ < croissance $\underline{x}$ < croissance $\underline{x^\alpha}$ < croissance $\underline{e^x}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

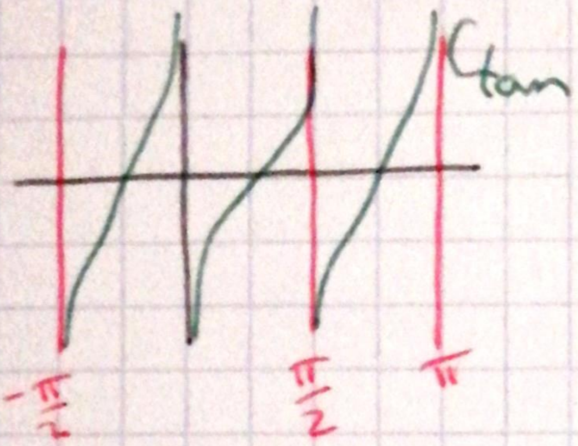
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Math 1 - Semestre 1

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

astuce : on divise par $\cos a \cos b$ en haut et bas.



$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad sh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$ch'(x) = sh(x) \quad \text{et} \quad sh'(x) = ch(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{ch(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{sh(x)}{x} = 1$$

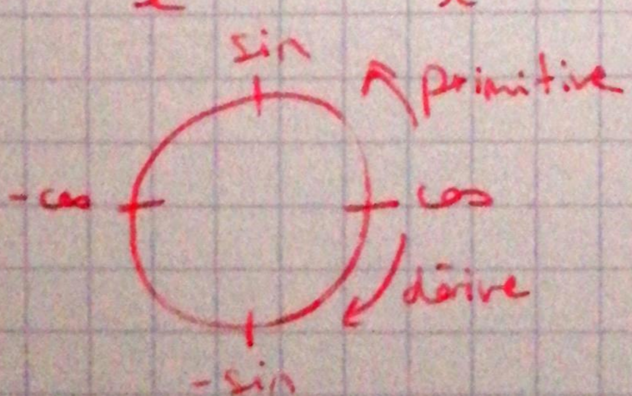
formule trigo avec ch et sh :

$\sin \to i\,sh$
$\cos \to ch$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' \to \frac{-1}{x^2} \qquad x^{n\,\prime} \to n x^{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{x}\,' \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



$$e^{x\,\prime} \to e^x$$

$$\ln x' \to \frac{1}{x}$$

$$ch' \to sh \quad \text{et} \quad sh' \to ch$$

$$\tan = \frac{\sin}{\cos} \Rightarrow \text{faire le calcule} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \ x^y = e^{y \ln x}$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Thm de Weierstrass :

f continue sur $[a,b]$

$\Rightarrow$ f bornée et atteint ses bornes

$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists (m,M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [a,b], \ m \leq f(x) \leq M \\ \text{il existe min et max avec } x \in [a,b] \end{cases}$

Thm de Bolzano :

- f continue sur I
- f change de signe
  - $\Leftrightarrow \exists (a,b) \in I^2, \ f(a) f(b) < 0$

$\Rightarrow \exists s \in [a,b], f(s) = 0$ et $\exists !$ si monotonie stricte.

Thm valeurs intermédiaires :

f continue sur $[a,b]$

$\Rightarrow \exists (m,M) \in \mathbb{R}^2, \ m < M$ et $f([a,b]) = [m,M]$

f continue et strictement monotone sur $[a,b]$

$\Rightarrow$ f établit une bijection de $[a,b]$ sur $f([a,b])$.

Thm de la bijection :

$J = f(I)$, $a < b$, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$

Thm de la bijection :

$J = f(I)$, $a < b$ avec $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ ~ $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$

f croissant $\Rightarrow$
- $I = [a,b]$ $\Rightarrow$ $J = [f(a), f(b)]$
- ou $\Rightarrow$ $J =]\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x)[$
- $I =]a,b[$ $\Rightarrow$ $J =]\lim_{x \to a^+} f(x), f(b)]$
- ou $\Rightarrow$ $J = [f(a), \lim_{x \to b^-} f(x)[$

f décroissant : - on remplace b^- par a^+ et a^+ par b^-.

- on remplace a par b sauf intervalle.

f impaire $\Rightarrow$ f^{-1} impaire

f^{-1} continue et m̂ monotonie que f.

point fixe : $f(x_0) = x$.