

ALGÈBRE / APPLICATIONS L.

+ MATRICE

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{L}(E, F) \\ \dim E = \dim F = n \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \left| \right. \Rightarrow [A \text{ inversible} \Leftrightarrow u \text{ bijectif}]$$

$$\hookrightarrow \text{Mat}(u, \underset{\substack{\downarrow \text{ base de } E \\ \text{ base de } F}}{E}, F) \stackrel{-1}{=} \text{Mat}(u^{-1}, F, E)$$

considérons mtr:

$$u \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$E = (e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E$$

$$F = (f_1, \dots, f_p) \text{ base de } F$$

$$A = \text{Mat}(u, E, F)$$

$$E' = (e'_1, \dots, e'_n) \text{ base de } E$$

$$F' = (f'_1, \dots, f'_p) \text{ base de } F$$

$$A' = \text{Mat}(u, E', F')$$

$$P_{E'E} = \text{Mat}(\text{id}_E, E', E)$$

$\hookrightarrow$ matrice de passage de l'ancienne base E vers la nouvelle base E' .

$\hookrightarrow$ en vrai c'est l'inverse $\Rightarrow$ contre-intuitif $\triangle$

$$P_{E'E} \text{ inversible et } P_{E'E}^{-1} = P_{E'E}$$

$$A' = P_{F'F} \cdot A \cdot P_{E'E}$$

$$v \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow B' = P_{E'E} \cdot B \cdot P_{E'E} \quad \text{avec } \begin{aligned} B &= (v, E) \\ B' &= (v', E') \end{aligned}$$

$$\forall (A, B) \in (M_{pn}(\mathbb{K}))^2,$$

$$\left\{ \begin{aligned} A \text{ et } B \text{ équivalentes} &\Leftrightarrow \exists (Q, P) \in (GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})) \mid B = Q^{-1} A P \\ A \text{ et } B \text{ semblables} &\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \mid B = P_{E'E} \cdot A \cdot P_{E'E} \end{aligned} \right.$$

$$u \in \mathcal{L}(E, F), A = \text{Mat}(u, E, F), A' = \text{Mat}(u, E', F')$$

$\Rightarrow A$ et A' équivalentes.

$$v \in \mathcal{L}(E), B = \text{Mat}(v, E), B' = \text{Mat}(v, E')$$

$\Rightarrow B$ et B' semblables.

A et B semblable $\Rightarrow \text{Tr } A = \text{Tr } B$

$\text{rg } A = \dim \text{Vect}(\underbrace{C_1, C_2, \dots, C_n}_{\text{vecteurs colonnes de } A})$

$\text{rg } A \leq \min(p, n)$, $A \in M_{pn}(\mathbb{K})$

matrices équivalentes $\Rightarrow$ même rang.
semblables

$\hookrightarrow u \in \mathcal{L}(E, F)$
 $A = \text{Mat}(u, E, F)$ $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{rg } u = \text{rg } A \end{array} \right.$

$A \in M_{pn}(\mathbb{K})$

$\text{rg } A = r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \text{ équivalente à } B \\ B = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{p-r, r} & 0_{p-r, n-r} \end{bmatrix} \end{array} \right.$

ENFIN:

- $\Leftrightarrow A$ inversible
- $\Leftrightarrow {}^t A$ inversible
- $\Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{K}), AB = I_n$
- $\Leftrightarrow \exists B' \in M_n(\mathbb{K}), B'A = I_n$
- $\Leftrightarrow$ colonnes de A libres
- $\Leftrightarrow$ lignes de A libres
- $\Leftrightarrow \text{rg } A = n$
- $\Leftrightarrow \text{rg } {}^t A = n$

ALGÈBRE / Déterminant

2 vecteurs

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$* \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\det_{\mathbb{E}}(\alpha u, v) = \alpha \det_{\mathbb{E}}(u, v)$$

$$\det_{\mathbb{E}}(u, \beta v) = \beta \det_{\mathbb{E}}(u, v)$$

$$* \det_{\mathbb{E}}(\underbrace{u}_{\text{cercle}}, \underbrace{v+w}_{\text{cercle}}) = \det_{\mathbb{E}}(\underbrace{u}_{\text{cercle}}, v) + \det_{\mathbb{E}}(\underbrace{u}_{\text{cercle}}, w)$$

$$* \det_{\mathbb{E}}(\underbrace{u+w}_{\text{cercle}}, \underbrace{v}_{\text{cercle}}) = \det_{\mathbb{E}}(\underbrace{u}_{\text{cercle}}, v) + \det_{\mathbb{E}}(\underbrace{w}_{\text{cercle}}, v)$$

$$* \det_{\mathbb{E}}(v, u) = -\det_{\mathbb{E}}(u, v)$$

3 vecteurs

Sarrus

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \underbrace{aei + dhc + gb f}_{\text{Sarrus}} - \underbrace{g e c - a h f - d b i}_{\text{Sarrus}}$$

$$* \det_{\mathbb{E}}(v, u, w) = -\det_{\mathbb{E}}(u, v, w)$$

$$\Rightarrow \det_{\mathbb{E}}(v, w, u) = \det_{\mathbb{E}}(u, v, w) = \text{cycle (2 permutation)}$$

Cas général : n vecteurs

"air orienté" en 2d.

$$* \det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)}{\varphi(e_1, e_2, \dots, e_n)}$$

$$* [(v_1, v_2, \dots, v_n) \text{ libre}] \Leftrightarrow [\det_{\mathbb{E}}(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0]$$

$$* \det A = \det_{\mathbb{E}}(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

Notations :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \in \mathbb{R} \neq \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \det I_n = 1$$

* échanger 2 colonnes change le signe du déterminant

* ajouter à une colonne une CL des AUTRES colonnes ne modifie pas le déterminant

$$* \forall \lambda \in \mathbb{R}, \det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

$$* \forall A \in M_n(K), \det({}^t A) = \det(A)$$

$$* \forall (A, B) \in M_n(K)^2, \det(BA) = \det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$* A \in M_n(K), \begin{cases} A \text{ inversible} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \\ A \text{ inversible} \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \end{cases}$$

* des matrices semblables ont le même det.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline \end{array} \xrightarrow{i^{\text{e}} \text{ ligne}} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline 1 & x \\ \hline C & D \\ \hline \end{array} = (-1)^{i+j} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline \end{array}$$

$j^{\text{e}} \text{ colonne}$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\text{pour}} \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

* $A \in M_n(K)$, comatrice de A ou matrice des cofacteurs de A les matrices $M_n(K)$, com A = $((-1)^{i+j} \Delta_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$

$$* \forall A \in M_n(K), \begin{cases} ({}^t \text{com A}) \cdot A = A \cdot ({}^t \text{com A}) = \det A \cdot I_n \\ A \text{ inversible} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{com A} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_1^+ & b_1^- & c_1^+ \\ a_2^- & b_2^+ & c_2^- \\ a_3^+ & b_3^- & c_3^+ \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

↳ Développement de Laplace suivant une ligne ou une colonne.
↳ p. 115-116 du poly par la formule rigoureuse.

ALGÈBRE / Calcul matriciel

Méthode de résolution d'un système par matrice.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + my + mz = b \\ mx - y + z = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ m & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \\ A_m X = B \end{cases}$$

Résoudre (S) revient à trouver X tq $X = A_m^{-1} \cdot B$

- $\Rightarrow$
- A_m inversible
 - trouver A_m^{-1}
 - multiplier par B ou lire graphiquement

$$A_m^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A_m^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$$

A = (a_{ij})
i grad colonne

Transposé : transposé de $A \Leftrightarrow A^t$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

(on remplace les lignes par les colonnes)

↑ axe de symétrie

Trace : $\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Tr } A = 6$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

Addition de matrice : on additionne les coefficients un à un.

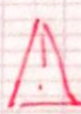
Multiplication de matrice : possible si "nb colonnes 1^{re}" = "nb lignes de 2^e"
 $A \in M_{mp}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{pn}(\mathbb{K})$

BA n'existe que si A et B sont de même taille.

$$AB = \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{i \in [1, m] \\ j \in [1, n]}}$$

Propriété des matrices : $\lambda \in \mathbb{K}$, $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
- ${}^t({}^tA) = A$

- $A(BC) = A(BC) = ABC$
 - $\lambda(AB) = (\lambda A) \cdot B = A \lambda B = \lambda AB$
 - $A(B + D) = AB + AD$
 - $(B + D)C = BC + DC$
 - $AI_n = I_p A = A$
 - ${}^t(A + B) = {}^tB + {}^tA$
 - $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
-  attent° au sens $AB \neq BA$

- ${}^tA = A \Rightarrow A$ symétrique
- ${}^tA = -A \Rightarrow A$ antisymétrique $\Rightarrow$ coeff diagonale nul.

$$AB \text{ inversible} \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$A^{-1} \text{ inversible} \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$$

ALGÈBRE / Reduct° endomorphismes

vp
 $\hookrightarrow$ valeur propre : $\lambda, \exists v \in E, \begin{cases} v \neq 0_E \\ u(v) = \lambda v \end{cases}$
 $\nearrow$
 $\hookrightarrow$ vecteur propre
 $\nearrow$
 $\hookrightarrow$ vp

$$\text{Spec}(u) = \{ \lambda \in K \mid \exists v \in E, v \neq 0_E \text{ et } u(v) = \lambda v \}$$

$$\lambda \in K, E_\lambda = \{ v \in E, u(v) = \lambda v \} = \ker(u - \lambda \text{id}_E)$$

$\hookrightarrow E_\lambda$ sev de E

$\hookrightarrow E_\lambda$ stable par u

$$u \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \exists \text{ une base de } E \text{ formée de } \overbrace{vp \text{ de } u}^{\lambda_1, \dots, \lambda_p}$$

$$u \in \mathcal{L}(E) \Leftrightarrow E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \text{ vp de } u, E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\} \Leftrightarrow E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$$

$$\lambda \in \text{Spec}(u) \Leftrightarrow \det(u - \lambda \text{id}_E) = 0$$

Polynôme caractéristique: (degrés n)

$u \in \mathcal{L}(E), A = \text{Mat}(u, E)$ base canonique

$$P_u(x) = \det(A - x I_n)$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \cdot \text{Tr}(A) x^{n-1} + \dots + \det A$$

$$* P_A(0) = \det A$$

dim finie

* deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique
 spectre

VP de u sont les racines de P_u dans K

$\dim E = n \Rightarrow u$ a n valeurs propres

$$P_u \text{ scindé dans } K \left\{ \begin{array}{l} \sum \lambda = \text{Tr}(A) \\ \prod \lambda = \det(A) \end{array} \right.$$

$$\prod \lambda = \det(A)$$

$$\lambda \text{ vp de multiplicité } m_\lambda \Rightarrow 1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$$

u diagonalisable $\Leftrightarrow \begin{cases} P_u \text{ scindé dans } K \\ \forall \lambda \in \text{Spec } u, \dim E_\lambda = m_\lambda \end{cases}$

multiplicité de λ $\downarrow$

$u \in \mathcal{L}(E)$

$\begin{cases} \dim E = n \\ P_u \text{ a } n \text{ racines distinctes} \end{cases} \Rightarrow u \text{ diagonalisable}$

$0 \notin \text{Spec } f \Leftrightarrow f \text{ bijectif}$

ALGÈBRE / Espaces vectoriels

Definitions EV.

$$+ : E \times E \rightarrow E \text{ (loi interne)} \quad | \quad \cdot : K \times E \rightarrow E \text{ (loi interne)}$$

$$(u, v) \mapsto u + v \quad | \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

- $(E, +)$ est groupe commutatif $\forall (u, v) \in E^2$
 - $\hookrightarrow u + v = v + u$ commutatif
 - $\hookrightarrow (u + v) + w = u + (v + w)$ associatif
 - $\hookrightarrow \exists 0_E : 0_E + u = u + 0_E = u$ admet un neutre
 - $\hookrightarrow \forall u, \exists u', u + u' = 0_E$ et on note $u' = -u$ admet un symétrique

- " " $\forall (u, v, \lambda, \mu) \in E^2 \times K^2$
 - $\hookrightarrow \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
 - $\hookrightarrow (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
 - $\hookrightarrow (\lambda \cdot \mu)u = \lambda(\mu u)$
 - $\hookrightarrow 1_K \cdot u = u$
 - $\sim$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C} : 1_K = 1$

élément de E : vecteurs

élément de K : scalaire

$$(\forall (x, y, \lambda) \in F^2 \times K \mid (x + y) \in F \text{ et } \lambda x \in F) \Leftrightarrow F \text{ stable.}$$

$$F \text{ s.e.v. de } E \Leftrightarrow (F \neq \emptyset \text{ et } \forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in F^2, \lambda x + y \in F)$$

$$\Leftrightarrow (F \neq \emptyset \text{ et } F \text{ stable par les loi "+" et "\cdot"})$$

F et G des sev de E

$$\Rightarrow F \cap G \text{ sev de } E \text{ car } F \cap G \neq \emptyset \text{ car } 0_E \in F \text{ et } 0_E \in G.$$

on note $\text{vect}(A)$ le plus petit (au sens de l'inclusion) sev de E contenant A . $\text{vect}(A)$ est le sev engendré par A .

$$\text{vect } A = \begin{cases} \{0_E\} & \text{si } A = \emptyset \\ x \in E / \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \text{ et } \exists (x_1, \dots, x_n) \in A^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \neq \emptyset \\ E = \text{vect}(A) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} A \text{ g\u00e9n\u00e9ratrice de } E \\ \hookrightarrow \text{aussi: } A \text{ engendre } E \end{array}$$

si $E = \text{vect } A$, il n'y a pas unicit\u00e9 de A

- famille libre $\Leftrightarrow \left[\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_E \right]$
- non(libre) = li\u00e9e.

une famille infini de E est libre $\Leftrightarrow$ toutes ses familles libres.

si une sous famille est li\u00e9e, alors la famille est li\u00e9e

base de $E \Leftrightarrow$ (libre + g\u00e9n\u00e9ratrice) de E

$$(x) \text{ libre} \Leftrightarrow x \neq 0_E$$

$$\checkmark \\ x_i = 0_E \Rightarrow (x) \text{ li\u00e9e}$$

$$(x_n) \text{ libre} \Rightarrow (\forall i \neq j)(x_i \neq x_j)$$

$$\left. \begin{array}{l} E = \text{vect}(A) \text{ et } \text{card}(A) \text{ finit} \Rightarrow E \text{ finit} \\ \hookrightarrow \text{card}(A) \neq \text{finit} \Rightarrow E \text{ infini} \end{array} \right\} \text{dimension}$$

toute famille g\u00e9n\u00e9ratrice E a un espace vect E
a plus d'\u00e9l\u00e9ment qu'une famille libre de E .

ALGÈBRE/Espaces vectoriels

$\left\{ \begin{array}{l} E \text{ EV dim finie} \\ E \text{ non réduit au vecteur nul} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{de toute famille génératrice de } E, \\ \text{on peut extraire une base de } E \end{array} \right.$

dimension de $E \Leftrightarrow$ nombre d'élément d'une base de E

$$\text{rg}(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{famille de vecteurs d'un EV } E}}) = \dim[\text{vect}(x_1, \dots, x_n)] = \text{card}(x_1, \dots, x_n)$$

Théorème de la base incomplète

$\left\{ \begin{array}{l} E \text{ EV dim finie} \\ L \text{ famille libre de } E \end{array} \right. \Rightarrow \exists \text{ Base de } E \text{ contenant } L$

(dans la pratique on complète avec les vecteurs de la base canonique).

E EV et $\dim E = n$

- L famille libre de $E \Rightarrow \text{card } L \leq n$
- G famille génératrice de $E \Rightarrow \text{card } G \geq n$
- L $\left\{ \begin{array}{l} \text{libre} \\ \text{ou} \\ \text{génératrice} \end{array} \right.$ et $\text{card } L = n \Rightarrow L$ base de E

important $\rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ SEV de } E \\ E \text{ et } F \text{ dim finie} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dim F \leq \dim E \\ \dim F = \dim E \Rightarrow E = F \\ \dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 \end{array} \right.$$

Sommes : F et G SEV de E

$$\begin{aligned} F + G &= \{ \beta \in E \mid \exists (x, y) \in F \times G, \beta = x + y \} \\ &= \{ x + y \mid (x, y) \in F \times G \} \subset E \\ &= \text{vect}(F \cup G) \quad \leftarrow \text{important} \end{aligned}$$

$$F + G = F + H \quad \not\Rightarrow \quad G = H \quad \mid \quad F + F = F$$

mais "associative" et "+" commutative et $\{0_E\}$ neutre (somme)

Somme directe: F et G SEV de E

$$F \cap G = \{0_E\} \Rightarrow F + G = F \oplus G$$

$E = F \oplus G \Leftrightarrow F$ et G sont supplémentaires dans E

$$\Leftrightarrow (\forall x \in E) (\exists! (y, z) \in F \times G) (x = y + z)$$

$$\Leftrightarrow (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_s) \text{ base de } E$$

($u_1, \dots, u_n$) base de F , et $(v_1, \dots, v_s)$ base de G

$\Rightarrow F + G = \text{vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_s)$

$F \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_s)$ libre

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i \Leftrightarrow V \text{ une base de } E$$

$$F = \bigoplus_{i=1}^p E_i \Rightarrow F = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$$

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^p E_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim E_i$$

$\leftarrow i \neq j \Rightarrow 0$ car $\oplus$

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

$$E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \\ \dim E_1 + \dim E_2 = \dim E \end{cases}$$

$(u_1, \dots, u_n)$ base de F et $(v_1, \dots, v_s)$ base de G

$$\cdot F + G = \text{vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_s)$$

$$\cdot F \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_s) \text{ libre}$$

$$F = G \Leftrightarrow \begin{cases} \dim F = \dim G \\ F \subset G \text{ ou } G \subset F \end{cases}$$

card (famille) = nb d'élément de la famille

dim (vect (famille)) = dim de l'espace engendré par la famille $\leq$ card (famille)

ALGÈBRE / APPLICATIONS L. + MATRICE

$$u \text{ linéaire} \Leftrightarrow [\forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{C}, u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)]$$

ensemble des app. linéaires de E dans F : $\mathcal{L}(E, F)$

$$\hookrightarrow E = F \Rightarrow \text{endomorphisme} \Rightarrow \mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$$

$$\text{Ker } u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\}) \subset E$$

$$\text{Im } u = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x)\} = \{u(x) \mid x \in E\} = u(E) \subset F$$

$$u \in \mathcal{L}(E, F) \Rightarrow \begin{cases} u \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im } u = F \\ u \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker } u = \{0_E\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{L}(E, F) \} &\Rightarrow \begin{cases} u^{-1} \text{ linéaire} \\ u \in \text{Isom}(E, F) : \text{isomorphisme} \end{cases} \\ u \text{ bijective} &\hookrightarrow \text{cas où } E = F, u \in \text{Aut}(E) : \text{automorphisme} \end{aligned}$$

$$u \in \mathcal{L}(E, F) \Rightarrow \begin{cases} * u \text{ injective} \Rightarrow \text{l'image d'une famille libre de } E \text{ est libre dans } F. \\ * u \text{ injective} \} \Rightarrow \dim E \leq \dim F \\ \text{E et F dim finie} \\ * u \text{ surjective} \Rightarrow \text{l'image d'une partie} \\ \text{génératrice de } E \text{ est} \\ \text{une partie génératrice de } F. \\ * u \text{ surjective} \} \Rightarrow F \text{ de dim finie et } \dim E \leq \dim F \\ \text{E de dim finie} \\ * u \text{ bijective} \Rightarrow \text{l'image d'une base de } E \text{ est} \\ \text{une base de } F. \\ * u \text{ bijective de } E \} \Rightarrow \dim E = \dim F \\ \text{dim finie} \quad \text{et } F \text{ de dim finie} \end{cases}$$

$$\text{Im } u \text{ sev de } F \} \Rightarrow \text{rg } u = \dim \text{Im } u \\ F \text{ dim finie}$$

Théorème du rang: $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et E dim finie

$$\dim E = \dim \ker u + \dim \operatorname{Im} u$$

thm du
tout-ou-rien

$\left\{ \begin{array}{l} \dim E = \dim F = n \in \mathbb{R} \leftarrow \text{finie} \\ u \in \mathcal{L}(E, F) \end{array} \right. \Rightarrow$
 $\operatorname{rg} u = n \Leftrightarrow u \text{ bijective} \Leftrightarrow u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective}$

composition $(u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(F, G)) \Rightarrow v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$

$$\left. \begin{array}{l} \dim E = n \in \mathbb{R} \\ \dim F = p \in \mathbb{R} \\ E = (e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E \\ F = (f_1, \dots, f_p) \text{ base de } F \end{array} \right\} \Rightarrow u \in \mathcal{L}(E, F)$$

$$\left. \begin{array}{l} u \in \mathcal{L}(E, F) \\ v \in \mathcal{L}(E, F) \\ (e_i)_{i=1..n} \text{ base de } E \end{array} \right\} \Rightarrow [u=v] \Leftrightarrow (\forall x \in E, u(x)=v(x)) \Leftrightarrow (\forall i=1..n, u(e_i)=v(e_i))$$

$$\begin{array}{c} \text{arrivé} \\ \text{Mat}(u, E, F) \in M_{p,n}(\mathbb{K}) \\ \text{départ} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} (e_1, e_2) \quad (e_1, e_2, e_3) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Mat}(u, E, F) = \left[\begin{array}{cc|c} p(e_1) & p(e_2) & e_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & e_3 \end{array} \right] \end{array} \right.$$

$\hookrightarrow$ dans le cas où $E = F$, on notera $\operatorname{Mat}(u, E)$

On peut sommer les matrices dans la même base et les multiplier par un scalaire

$$\left. \begin{array}{l} \text{base définie} \\ \text{matrice } M_{p,n}(\mathbb{K}) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists ! A \in \mathcal{L}(E, F), A = \operatorname{Mat}(u, E, F)$$

$$\left. \begin{array}{l} \dim E = n \in \mathbb{R} \\ \dim F = p \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \dim \mathcal{L}(E, F) = p.n$$