

ANALYSE / Primitives et calcul intégral

$\forall f \in C^0(I, \mathbb{R}), f$ intégrable sur I .

Propriétés

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x) \cdot dx = \lambda \int_a^b f(x) \cdot dx \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx + \int_a^b g(x) \cdot dx$$

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot dx$$

$$(\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0) \Rightarrow \left(\int_a^b f(x) \cdot dx \geq 0 \right)$$

$$(\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x)) \Rightarrow \left(\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) \cdot dx \right)$$

Relation de Chasles: $\forall c \in [a, b], \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) \cdot dx + \int_c^b f(x) \cdot dx$

Théorème fondamental de l'analyse:

- $\forall a \in I, G_a: x \mapsto G_a(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$ est C^1 et vérifie :
 $\forall x \in I, G'_a(x) = f(x)$
 $\Leftrightarrow G_a$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a .
- F une primitive de f sur I , $F - G_a$ est une constante.

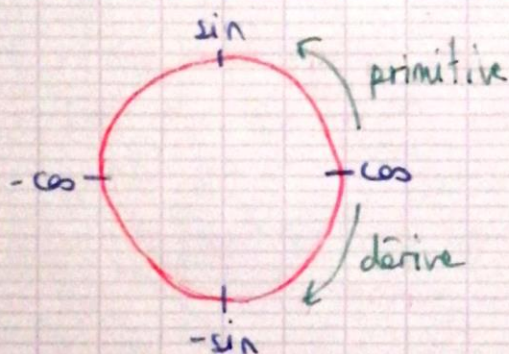
$$\forall x \in I, F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) \cdot dt = F(a) + \int_a^x F'(t) \cdot dt$$

$$\int_a^b f(t) \cdot dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$f(x)$	x^m	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	e^x	$1+\tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$	$\frac{1}{\sin^2}$	$\cos x$	$\sin x$
$F(x)$	$\frac{x^{m+1}}{m+1}$	$\ln x $	$x \ln x - x$	e^x	$\tan x$	$\cotan = \cos/\sin$	$\sin x$	$-\cos x$

pas à connaître

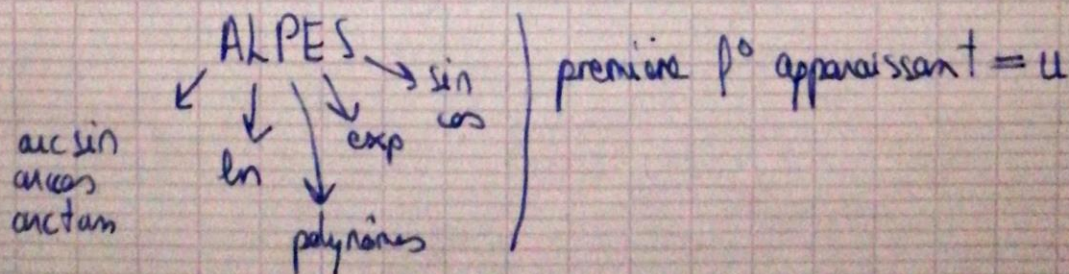
$f(x)$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$	$\frac{1}{\operatorname{sh}^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$F(x)$	$\operatorname{th} x$	$\coth x = \operatorname{ch}/\operatorname{sh}$	arctan	$2\sqrt{x}$	Argh	Argch	$\operatorname{Arghsin}$	Argcos



$$\begin{aligned} \operatorname{ch}'(x) &= \operatorname{sh}(x) \\ \operatorname{sh}'(x) &= \operatorname{ch}(x) \end{aligned}$$

IPP: $\int_a^b u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) \cdot dx$

$v' = e^x$ permet de faire tomber les degrés de u .



ANALYSE / Thm fondamentaux, Taylor

Rolle

$$\forall \begin{cases} a < b \text{ et } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\ f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est } C^0 \text{ sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$$

Accroissement finis

$$\forall \begin{cases} a < b \text{ et } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\ f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ } C^0 \text{ sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in]a,b[, f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Inégalité des accroissements finis

$$a < b \text{ et } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

$$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ } C^0 \text{ sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ f' \text{ bornée sur }]a,b[\end{array} \right\} \Rightarrow \forall (x,y) \in [a,b]^2, |f(x) - f(y)| \leq \sup_{t \in]x,y[} |f'(t)| |x-y|$$

$$[\text{majoré} + \text{minoré}] \Leftrightarrow (\exists m, M) \in \mathbb{R}^2 (\forall x \in \mathbb{R}) (m \leq f'(x) \leq M)$$

Thm 2.9 = Rappel thm :

$$f \text{ } C^0 \text{ sur } [a,b] \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

$$f \searrow \text{ sur } [a,b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$$

$$f \nearrow \text{ sur } [a,b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$$

$$f \text{ strictement } \searrow \text{ sur } [a,b] \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

$$f \text{ strictement } \nearrow \text{ sur } [a,b] \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]a,b[$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in C^1 \text{ sur } I \setminus \{a\} \\ \lim_{x \rightarrow a} f'(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \in C^1 \text{ sur } a \\ f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x) \end{array} \right.$$

* Taylor : $f \in C^{n+1}$ sur $[a, b]$, $\forall x \in [a, b]$.

Reste intégrale

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(a) (x-a)^k}{k!} \right) + \frac{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}{n!}$$

* Taylor-Lagrange : $f \in C^n$ et $n+1$ fois dérivable sur I , $\forall (a, x) \in I^2$,
 $\exists c \in]a, x[$,

reste Lagrange.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(a) (x-a)^k}{k!} \right) + \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\hookrightarrow n=0$, thm accroissements finis.

$$\left. \begin{array}{l} f: I \rightarrow \mathbb{R} \\ f \in C^{n+1}(I) \\ f^{(n+1)}(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \deg f \leq n$$

* Taylor-Young : $f \in C^n$ sur I , $a \in I \Rightarrow \exists \varepsilon, \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

reste young

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a) \cdot (x-a)^k}{k!} + (x-a)^n \cdot \varepsilon(x)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon_n(x)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n} \varepsilon_n(x)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon_n(x)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1) x^k}{k!} + x^n \varepsilon_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0) \cdot x^k}{k!}$$

↑ polynômes
Lagrange

ANALYSE / Thm fondamentaux, Taylor

DEFINITION

- * $\left[\exists \lambda > 0 \text{ et } \forall \epsilon \in V(a), x \in V \Rightarrow |f(x)| \leq \lambda |g(x)| \right] \Rightarrow f \text{ domine par } g$
on note alors $f = O_a(g)$ ou $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$
- * $\left[\forall \epsilon > 0, \exists V \in V(a), x \in V \Rightarrow |f(x)| \leq \epsilon |g(x)| \right] \Rightarrow f \text{ négligeable devant } g$
on note alors $f = o_a(g)$ ou $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$

$$\left[f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x)) \right] \Leftrightarrow \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right]$$

$$\left[f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x)) \right] \Leftrightarrow \left[f \text{ bornée dans un voisinage de } a \right]$$

o et O : notion locale !

formule de Taylor : reste = $o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} E(x) = 0$

f, g, h, ψ définies dans un voisinage de a , sauf peut être en a
 g, h, ψ ne s'annulent pas dans un voisinage de a $\uparrow$
 et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \bullet \lambda \frac{f}{g}(h) + \frac{g}{a}(h) = \frac{g}{a}(h) \\ \bullet f = o_a(g) \Rightarrow f = O_a(g) \\ \bullet f = o_a(g) \Rightarrow f \cdot h = o_a(g \cdot h) \\ \bullet f = O_a(g) \Rightarrow f \cdot h = O_a(g \cdot h) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \bullet f = o_a(g) \left. \begin{array}{l} h = o_a(\psi) \\ h = O_a(\psi) \end{array} \right\} \Rightarrow fh = o_a(g\psi) \\ \bullet f = O_a(g) \left. \begin{array}{l} h = o_a(\psi) \\ h = O_a(\psi) \end{array} \right\} \Rightarrow fh = O_a(g\psi) \end{array} \right.$$

Croissances comparées : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{l} \bullet (\ln x)^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha) \\ \bullet x^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(e^{\alpha x}) \\ \bullet |\ln x|^\beta = o_{x \rightarrow 0^+}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\ln x)^\beta \leq x^\alpha \\ x^\beta \leq e^{\alpha x} \\ |\ln x|^\beta \leq x^{-\alpha} \end{array} \right. \begin{array}{l} \forall x \in V(+\infty) \\ \\ \forall x \in V(0^+) \end{array}$$

$$[f \sim g \text{ ou } f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)] \Leftrightarrow \forall x \in V, \begin{cases} f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x)) \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

$$f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\begin{aligned} * f &\sim f \\ * f &\sim g \Leftrightarrow g \sim f \\ * \left. \begin{array}{l} f \sim g \\ g \sim h \end{array} \right\} &\Rightarrow f \sim h \end{aligned}$$

$$f(x) \sim_{x \rightarrow a} 0 \Leftrightarrow [\exists V \in \mathcal{V}(a) \mid \forall x \in V \mid f(x) = 0]$$

$\hookrightarrow$ SEUL CAS OÙ $\sim_a$ nul

$$* l \in \mathbb{R}^*, f(x) \sim_{x \rightarrow a} l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$* f \sim g \Rightarrow \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \right]$$

$$* f \sim g \Rightarrow f \text{ et } g \text{ de m\^emes signes au voisinage de } a.$$

$$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) + g(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$* \text{Produit : } \left. \begin{array}{l} f \sim g \\ \varphi \sim \psi \end{array} \right\} \Rightarrow f\varphi \sim g\psi$$

$$* \text{Quotient : } \left. \begin{array}{l} f \sim g \\ \varphi \sim \psi \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f}{\varphi} \sim \frac{g}{\psi}$$

$$* \text{composition \`a droite : } \left. \begin{array}{l} f \sim g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a \end{array} \right\} \Rightarrow f(\varphi(x)) \sim_{x \rightarrow x_0} g(\varphi(x))$$

ANALYSE / Thm fondamentaux, Taylor

$$f \sim_a g$$

- $f \sim_a g \Rightarrow$
- * $|f| \sim |g|$
 - * $\forall a > 0, g > 0$ au voisinage de $a \Rightarrow p^a \sim_a g^a$
 - * $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = l \in [0, +\infty] \setminus \{1\} \Rightarrow \ln p(x) \sim_{x \rightarrow a} \ln g(x)$
 - * $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = 1 \Rightarrow \ln p(x) \sim_{x \rightarrow a} (p(x) - 1)$
 - * $\lim_{x \rightarrow a} (p(x) - g(x)) = 0 \Rightarrow e^{p(x)} \sim_{x \rightarrow a} e^{g(x)}$

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, a \in I$$

$\Rightarrow$

- * f dérivable en a $f'(a) \neq 0 \Rightarrow p(x) - p(a) \sim_{x \rightarrow a} f'(a)(x - a)$
- * f dérivable en a $f'(a) = 0, s = \min\{k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(a) \neq 0\}$
 $f \in C^s$ sur $I, \quad p(x) - p(a) \sim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(s)}(a)}{s!} (x - a)^s$

$$\sin x \sim_0 x$$

$$\cos x - 1 \sim_0 -\frac{x^2}{2}$$

$$\tan x \sim_0 x$$

$$\ln(1+x) \sim_0 x$$

$$\operatorname{Arcsin} x \sim_0 x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x \quad \forall \alpha \neq 0$$

$$\operatorname{sh} x \sim_0 x$$

$$\operatorname{ch} x - 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$$

$$\operatorname{th} x \sim_0 x$$

$$e^x - 1 \sim_0 x$$

$$\operatorname{Arctan} x \sim_0 x$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x^y = e^{y \ln x}$$

voir séries comparées:

$$\ln < x < x^a < e^x$$

$$f: I \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2 \text{ sur } I, a \in I, f'(a) = 0$$

$$* \quad f''(a) > 0 \Rightarrow f \text{ admet minimum local strict en } a$$

$$* \quad f''(a) < 0 \Rightarrow f \text{ admet maximum local strict en } a$$

ANALYSE / C. Calcul intégral

$$\left. \begin{array}{l} I, J \text{ deux intervalles} \\ f \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{R}) \\ \varphi \in \mathcal{C}^0(I, J) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{On pose } \forall t \in I, g(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ \forall (a, b) \in I^2, \\ \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt \end{array} \right.$$

changement de variables à connaître : $t = e^x$

évident (par graphes)

$$\left. \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^0([-a; a]) \\ f \text{ impaire} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) \cdot dx = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^0([-a; a]) \\ f \text{ paire} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) \cdot dx = 2 \int_0^a f(x) \cdot dx$$

$$\left. \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f \text{ est } T\text{-périodique} \end{array} \right\} \Rightarrow \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x) \cdot dx \\ \int_a^{a+T} f(x) \cdot dx = \int_0^T f(x) \cdot dx \end{array} \right.$$

Primitives de polynômes en sinus et cosinus

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f: x \mapsto \sin^n(x) \cdot \cos^m(x) \cdot dx$$

primitive ?

↳ n ou m impair

$$\left. \begin{array}{l} \text{↳ } n \text{ impair} \Rightarrow t = \cos x \\ \text{↳ } m \text{ impair} \Rightarrow t = \sin x \end{array} \right\} \text{ règle de bioche}$$

↳ n ou m pair

⇒ linéarisation de $\sin^{2p}(x) \cdot \cos^{2q}(x)$

$$\text{↳ } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

Primitives de fonctions rationnelles en sinus et cosinus

$$f: x \mapsto F(\sin x, \cos x)$$

- ↳ invariant par chgmt $x \mapsto -x$ (càd $f(-x) \cdot d(-x) = f(x) \cdot dx$) $\Rightarrow t = \cos x$
- ↳ invariant par chgmt $x \mapsto \pi - x$ (càd $f(\pi - x) \cdot d(\pi - x) = f(x) \cdot dx$) $\Rightarrow t = \sin x$
- ↳ invariant par chgmt $x \mapsto \pi + x$ (càd $f(\pi + x) \cdot d(\pi + x) = f(x) \cdot dx$) $\Rightarrow t = \tan x$
- ↳ n'est pas invariant par $(-x, \pi + x) \Rightarrow$

$$\boxed{t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ et } dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

ANALYSE / ED linéaire du 1^{er} ordre

soit $I \subset \mathbb{R}$, $(f, a, b) \in \mathcal{C}^0(I)^3$ $a(x) \neq 0 \forall x \in I$,
 $a(x).y'(x) + b(x).y(x) = f(x)$

Sol homogène: $S_h = \{x \mapsto ce^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} \mid c \in \mathbb{R}\}$

Sol particulière: $v_0(x) = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$

$$S_p = \left\{ x \mapsto c(x).v_0(x) \mid \forall x \in I, c'(x) = \frac{f(x)}{a(x).v_0(x)} \right\}$$

$$\Rightarrow S_p = \left\{ x \mapsto v_0(x) \cdot \int \frac{f(x)}{a(x).v_0(x)} dx \right\}$$

$$\Rightarrow S_p = \left\{ x \mapsto e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} \cdot \int \frac{f(x)}{a(x).e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}} dx \right\}$$

ANALYSE / Développements Limités

L'ordre d'un DL se lit sur le reste $o(\dots^6) \Rightarrow DL_6$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{admet un } DL_0 \text{ en } a \Leftrightarrow f \text{ est continue en } a \\ \text{admet un } DL_1 \text{ en } a \Leftrightarrow f \text{ est dérivable en } a \end{array} \right\}$ ne fonctionne pas pour $DL_{2,3,\dots}$
 $\Rightarrow$ pas de DL en 0 pour $\ln$ par exemple.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,
DL en 0

$$(1+x)^x = 1 + \sum_{k=1}^n \left[\prod_{p=0}^{k-1} (\alpha - p) \cdot \frac{x^k}{k!} \right] + o(x^n)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^p \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^p \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$$

sans les $(-1)^k$

DEFINITION DU DL

$n \in \mathbb{N}$; f admet un DL_n en a

si : $\exists P_n, \deg P_n \leq n$

$\exists \varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in I, f(x) = P_n(x-a) + o(x-a)^n$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I, f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \end{array} \right.$$

$\pm\infty$ borne de I ; f admet un DL_n en $\pm\infty$

si : $\exists P_n, \deg P_n \leq n$

$\exists \varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in I, f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I, f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^n \varepsilon(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varepsilon(x) = 0 \end{array} \right.$$

p admet un DL_n en $a \Rightarrow$ l'exemple (P_n, E) unique
 $\Rightarrow P_n$ est la partie principale
 de p d'ordre n en a .
 on la note $P_n(p)$

f paire $\Rightarrow P_n(f)$ n'a que des puissances paires
 f impaire $\Rightarrow P_n(f)$ n'a que des puissances impaires

"+" et "." est $\left(\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \mid O \in I \text{ ou } O \text{ extrémité de } I \mid f, g: I \rightarrow \mathbb{R} \\ f, g \text{ admettent un } DL_n \text{ en } O \\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda f + \mu g \text{ admet un } DL_n \text{ en } O \\ P_n(\lambda f + \mu g) = \lambda P_n(f) + \mu P_n(g) \end{array} \right.$

"." $\left(\begin{array}{l} f, g: I \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, f \text{ et } g \text{ admettent un } DL_n \text{ en } O \\ \Rightarrow f \cdot g \text{ admet un } DL_n \text{ en } O \\ P_n(fg) \text{ s'obtient en trouvant à l'ordre } n \text{ } P_n(f) \cdot P_n(g) \end{array} \right.$

intégrations $\left(\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \mid O \in I \mid p: I \rightarrow \mathbb{R} \mid p \in \mathcal{C}^0 \\ p \text{ admet un } DL_n \text{ en } O, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)_{x \rightarrow 0} \\ \Rightarrow \text{VF primitive de } f \text{ sur } I, F \text{ admet un } DL_{n+1} \text{ en } O, \\ F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})_{x \rightarrow 0} \end{array} \right.$

Interdit de Dériver un DL

composition $\left(\begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \mid O \in I \text{ et } O \in J \mid f: I \rightarrow J \mid g: J \rightarrow \mathbb{R} \\ f(0) = 0 \\ f \text{ et } g \text{ admettent un } DL_n \text{ en } O \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g \circ f \text{ admet un } DL_n \text{ en } O \\ P_n(g \circ f) \text{ s'obtient en trouvant à l'ordre } n \\ \text{le polynôme } P_n(g) \circ P_n(f) \end{array} \right.$

ANALYSE / Développements limités

→ définie au voisinage de 0

$f, g: I \rightarrow \mathbb{R} \quad \ln \in \mathbb{N} \mid f, g$ admettent un DL_n en 0

deux cas

val $g = 0 \Rightarrow g(0) \neq 0$

* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(0)} \cdot \frac{1}{1+h(x)}$

$h(x) = \frac{g(x) - g(0)}{g(0)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

* puis en composant le DL à l'ordre n de h avec celui de $T \mapsto \frac{1}{1+T}$

* puis en multipliant par le DL à l'ordre n de f

val $g \neq 0 \Rightarrow g(0) = 0$

val $f \geq \text{val } g$

val $f < \text{val } g$

* on simplifie par $x^p \Rightarrow \text{val} = 0$

* DL_{n-p} de $\frac{f}{g}$

* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$

$\Rightarrow$ pas de DL.

EN GROS : on cherche à se ramener à $x \mapsto \frac{1}{1+u(x)}$ avec $u(a) = 0$

$f: I \rightarrow \mathbb{R}, a \in I$

f admet un DL_n en a

$\text{val}(f) = p$

$$f(x) = a_p(x-a)^p + a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

 $a_p \neq 0$ et $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x-a)^p$

en gros : équivalent c'est le premier terme du DL à tout ordre en a si le terme est non nul.

f admet un DL_n en 0 et $n \geq 2$

$\Rightarrow$ Équat° de la tangente = ordre 1 + ordre 2 du DL.

$\hookrightarrow f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$

$= y \leftarrow$ tangente = ordre 1 + ordre 2

la position relative est donnée par le signe de $f(x) - y$

Quotient

Développements limités généralisés $\Leftrightarrow$ DLG

$$n \in \mathbb{N},$$

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, x \mapsto (x-a)^p f(x) \text{ admet un DL}_{n+p} \text{ en } a$$

$$\Rightarrow f \text{ admet un DLG}_n \text{ en } a$$

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, x \mapsto \frac{f(x)}{x^p} \text{ admet un DL}_{n+p} \text{ en } \pm \infty$$

$$\Rightarrow f \text{ admet un DLG}_n^{x^p} \text{ en } \pm \infty$$

$$\Rightarrow f(x) = a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p + \frac{a_{p+1}}{x} + \dots + \frac{a_{n+p}}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \text{ as } x \rightarrow \pm \infty$$

petit oubli ^^ $\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{(x-a)^p} + \frac{a_1}{(x-a)^{p-1}} + \dots + a_p + a_{p+1}(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \text{ as } x \rightarrow a$

branches infinies

$$(C_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\})$$

$$[x \text{ ou } f(x) \rightarrow \pm \infty] \Rightarrow C_f \text{ admet une branche infinie.}$$

$$[C_f \text{ et } C_g \text{ asymptote au voisinage de } a] \Leftrightarrow \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0 \right]$$

$$* f(x) - g(x) \geq 0 \text{ au voisinage de } a \Rightarrow C_f \text{ au dessus de } C_g \text{ en } a$$

$$* f(x) - g(x) \leq 0 \text{ au voisinage de } a \Rightarrow C_f \text{ en dessous de } C_g \text{ en } a$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \right] \Rightarrow [x = a \text{ asymptote à } C_f \text{ au voisinage de } a]$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \right] \Rightarrow [y = b \text{ asymptote à } C_f \text{ au voisinage de } \pm \infty]$$