

Démos CC3

Proposé par : Baptiste Rébillard
Sur la base du cours de 2MIC de M. Noble Pascal

18 janvier 2023

Table des matières

1	Réduction d'endomorphismes	2
1.1	Donner la définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme. Donner un exemple.	2
1.2	Donner et démontrer une relation entre le spectre d'un endomorphisme et ses polynômes annulateurs.	2
1.3	Énoncer le lemme des noyaux. Donner un exemple d'application.	3
2	Séries entières	4
2.1	Démontrer le lemme d'Abel.	4
2.2	Définir le rayon de convergence d'une série entière. Montrer que si le rayon de convergence d'une série est égale à $0 < R < +\infty$ alors la série converge normalement sur $\bar{B}(0, r)$, $\forall r \in]0, R[$	4
2.3	Donner les résultats de continuité d'une série entière à coefficients réels (préciser le comportement au bord : théorème 4.16). Donner un exemple.	5
3	Matrices symétriques	6
3.1	Soit E un espace euclidien. Donner la définition d'une isométrie de E et donner des exemples d'isométries de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$	6
3.2	Donner la définition d'un endomorphisme symétrique u d'un espace euclidien E . Montrer que si $F \subset E$ est stable par u alors $F^\perp$ est aussi stable par u	6
3.3	Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique : montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles.	7
3.4	Montrer qu'un endomorphisme symétrique (ou matrice symétrique réelle) est diagonalisable dans une base orthonormée.	8
4	Séries de Fourier	9
4.1	Donner une condition suffisante sur les coefficients pour qu'une série trigonométrique soit continue, soit de classe $\mathcal{C}^1$. Donner un exemple dans les 2 cas.	9
4.2	Soit D l'ensemble des fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux telles que : $f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}, \forall x \in [0, 2\pi].$ On note $\mathcal{P}_N$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degrés $\leq N$. Montrer que $D = \mathcal{P}_N \oplus \mathcal{P}_N^\perp$. En déduire que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) ^2$ converge.	10
5	Bonus	12
5.1	Développer en série de Fourier la fonction f 2π -périodique définie par $f(x) = x , \forall x \in [-\pi, \pi].$ En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$	12

Chapitre 1

Réduction d'endomorphismes

1.1 Donner la définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme. Donner un exemple.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (ou $A \in M_d(\mathbb{K})$) et $P \in \mathbb{K}[x]$.

On dit que P est annulateur de u (respectivement de A) $\iff \begin{cases} P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \\ \text{resp. } P(A) = 0_{M_d(\mathbb{K})} \end{cases}$

Exemple :

Soit $U = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in M_d(\mathbb{K})$

$P(x) = x^2 - \mathbf{1}_d x$ est un polynôme annulateur.

$P(x) = x^3 - d^2 x$ est un polynôme annulateur.

1.2 Donner et démontrer une relation entre le spectre d'un endomorphisme et ses polynômes annulateurs.

P est un polynôme annulateur de u (resp. A) $\implies$ les valeurs propres de u (ou A) sont racines de P .

Démonstration :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. P est un polynôme annulateur et $\lambda \in Sp(u)$.

$$P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ car } P \text{ est annulateur de } u.$$

λ est une valeur propre de u donc : $\exists X \in \mathbb{K}^d \setminus \{0\}, u(X) = \lambda X$.

$$u^2(X) = u(u(X)) = u(\lambda X) = \lambda u(X) = \lambda^2 X$$

$$\implies u^n(X) = \lambda^n X, \forall n \geq 0$$

$$\begin{aligned}
0_{\mathcal{L}(E)} &= \sum_{k=0}^n a_k u^k \\
\Rightarrow 0_E &= \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k X \text{ En injectant } u^n(X) = \lambda^n X, \forall n \geq 0 \\
&= X \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \text{ Par linéarité de l'opérateur somme} \\
&= \underbrace{X}_{\in \mathbb{K}^d \setminus \{0\}} \times P(\lambda)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \text{ racine de } P.$$

1.3 Enoncer le lemme des noyaux. Donner un exemple d'application.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[x]$ un polynôme scindé dans $\mathbb{K}$.

$$P(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \text{ avec } \lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$$

Alors :

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker[(u - \lambda_i \mathbb{1})^{m_i}]$$

Version matricielle : on remplace u par A et m_i représente le produit matricielle.

Exemple :

$$\text{Soit } U = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P(X) = X(X - d)$$

$\ker(P(u)) = \mathbb{R}^d$ car P est annulateur.

$$\mathbb{R}^d = \ker U \oplus \ker(U - d\mathbb{1})$$

Chapitre 2

Séries entières

2.1 Démontrer le lemme d'Abel.

Lemme d'Abel Si la suite $(a_n \cdot z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors $\forall z \in \mathbb{C} / |z| < |z_0|$ la série des $\sum a_n \cdot z^n$ converge absolument.

Demo $Z_0 = 0$, on n'a rien à démontrer.

Supposons que $|Z_0| \neq 0$. On suppose donc que la suite $(a_n Z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et on veut montrer que :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n Z^n \text{ CVA.}$$

Soit $Z \in \mathbb{C}$, $|Z| < |Z_0|$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |a_n Z^n| &= \left| a_n Z_0^n \left(\frac{Z}{Z_0} \right)^n \right| \\ &= |a_n Z_0^n| \times \left| \frac{Z}{Z_0} \right|^n \\ &\leq \underbrace{\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n Z_0^n|}_{<1} \times \left| \frac{Z}{Z_0} \right|^n \end{aligned}$$

Par comparaison avec une série géométrique de raison $\left| \frac{Z}{Z_0} \right| < 1$, on a CVA de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n Z^n$.

2.2 Définir le rayon de convergence d'une série entière. Montrer que si le rayon de convergence d'une série est égale à $0 < R < +\infty$ alors la série converge normalement sur $\bar{B}(0, r)$, $\forall r \in]0, R[$

Rayon de convergence $R = \sup \{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$

Preuve Soit $r < R$, alors $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

D'après le lemme d'Abel,

$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ cv dès que $|z| < r$.

Comme on a choisit $r < R$, on a convergence simple dès que $|z| < R$.

Soit $r < R$, montrons qu'on a CVN sur $\bar{B}(0, r)$.

Soit $r_0 \in]r, R[$,

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n z^n| &\leq |a_n r^n| \\ &\leq \left| a_n r_0^n \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \right| \\ &\leq \underbrace{|a_n r_0^n|}_{\text{borné}} \times \underbrace{\left| \frac{r}{r_0} \right|^n}_{< 1} \end{aligned}$$

Par comparaison avec une série géométrique de raison $\left| \frac{r}{r_0} \right| < 1$, On a bien CVN sur $\bar{B}(0, r)$.

2.3 Donner les résultats de continuité d'une série entière à coefficients réels (préciser le comportement au bord : théorème 4.16). Donner un exemple.

la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est une fonction continue sur $] - R, R[$.

Si $R \in]0, +\infty[$, Alors on a des propriétés aux bornes :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n R^n \text{ CV} &\implies \text{continue en } R \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (-R)^n \text{ CV} &\implies \text{continue en } -R \end{aligned}$$

Exemple :

Posons :

$$L : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

L a un rayon de convergence : $R = 1$

Alors $L \in \mathcal{C}^0] - 1, 1[$.

$$x = R = 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \implies \text{diverge}$$

$$x = R = -1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \implies \text{converge (d'après critère sur les séries alternés)}$$

$$\implies L \in \mathcal{C}^0] - 1, 1[$$

Chapitre 3

Matrices symétriques

3.1 Soit E un espace euclidien. Donner la définition d'une isométrie de E et donner des exemples d'isométries de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Définition :

Soit E un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
 $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie

$$\iff \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\| \text{ où } \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Exemple :

rotations

symétries axiales

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad S_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

3.2 Donner la définition d'un endomorphisme symétrique u d'un espace euclidien E . Montrer que si $F \subset E$ est stable par u alors $F^\perp$ est aussi stable par u

Définition :

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que u est symétrique

$$\iff \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

On note $\mathcal{S}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ le SEV de $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes symétriques.

Preuve de la stabilité de $F^\perp$ par u :

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ (ensemble des endomorphismes symétriques) et $F \subset E$ un SEV stable par u de E .

Alors $\forall x \in F, u(x) \in F$ donc $u \in \mathcal{L}(F)$.

De plus, $\forall (x, y) \in F^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.
Ainsi, $u|_F \subset \mathcal{S}(F)$

Montrons que $F^\perp$ est aussi stable par u .
Soit $x \in F^\perp$. Montrons que $u(x) \in F^\perp$.

Soit $f \in F$,

$$\begin{aligned} \langle u(x), f \rangle &= \langle x, u(f) \rangle \quad \text{car } u \in \mathcal{S}(E) \\ &= 0 \quad \text{car } \begin{cases} x & \in F^\perp \\ u(f) & \in F \end{cases} \end{aligned}$$

3.3 Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique : montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in Sp(A)$ et X un vecteur propre associé.
Montrons que $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in \mathbb{R}$ revient à montrer que :

$Im(\lambda) = 0 \iff \lambda = \bar{\lambda}$ (car la partie imaginaire est nulle donc réel)

$$\begin{aligned} AX &= \lambda X \quad \text{car } \lambda \in Sp(A) \\ \bar{X}^\top AX &= \lambda \bar{X}^\top X \end{aligned}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_d \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}^\top X = \sum_{i=1}^d |X_i|^2 \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{donc on peut "diviser" par } \bar{X}^\top X$$

$$\lambda = \frac{\bar{X}^\top AX}{\bar{X}^\top X}$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \overline{\frac{\bar{X}^\top AX}{\bar{X}^\top X}} \\ &= \frac{\overline{\bar{X}^\top AX}}{\overline{\bar{X}^\top X}} \\ &= \frac{((X^\top A \bar{X})^\top)^\top}{((X^\top \bar{X})^\top)^\top} \\ &= \frac{(\bar{X}^\top AX)^\top}{(\bar{X}^\top X)^\top} \\ &= \left(\frac{\bar{X}^\top AX}{\bar{X}^\top X} \right)^\top \\ &= \lambda^\top \\ \implies \bar{\lambda} &= \lambda \end{aligned}$$

Donc la partie imaginaire de λ est nulle, donc $\lambda \in \mathbb{R}$

3.4 Montrer qu'un endomorphisme symétrique (ou matrice symétrique réelle) est diagonalisable dans une base orthonormée.

Preuve du théorème spectral :

On va procéder par récurrence.

Notons (H_d) l'hypothèse de récurrence.

(H_d) : "tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension d est diagonalisable dans une base orthonormée."

Initialisation : $d=1$

ne pose pas de problème

Hérédité : On suppose que (H_k) est vraie $\forall k \leq d$. Montrons que (H_{d+1}) est vraie.

Soit E un espace euclidien de dimension $d+1$ et $u \in \mathcal{S}(E)$ (un endomorphisme symétrique).

Soit $\lambda \in Sp(u) \in \mathbb{R}$. On considère $F = \ker(u - \lambda \mathbf{1})$.

On a $\dim F \geq 1$.

$$E = F \oplus F^\perp$$

F est stable par u et $u|_F$ est un endomorphisme symétrique de F .

On a également $F^\perp$ stable par u et $u|_{F^\perp}$ est un endomorphisme symétrique de $F^\perp$.

Pour F , on choisit une base orthonormée de F .

$$u|_F = \lambda \mathbf{1}_F$$

Donc $u|_F$ est déjà sous forme diagonale.

Pour $F^\perp$, on applique l'hypothèse de récurrence :

$u|_{F^\perp}$ admet une base orthonormée de vecteurs propres.

On rassemble les bases de F et $F^\perp$ pour obtenir une base orthonormée de E .

Ainsi (H_{d+1}) est vraie.

Conclusion : Par principe de récurrence, (H_d) est vraie $\forall d \in \mathbb{N}^*$

Chapitre 4

Séries de Fourier

4.1 Donner une condition suffisante sur les coefficients pour qu'une série trigonométrique soit continue, soit de classe $\mathcal{C}^1$. Donner un exemple dans les 2 cas.

Conditions :

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, les coefficients d'une série trigonométrique tels que :

$$U_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n, n \in \mathbb{N} \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n, n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \text{CVA} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n(t) \text{ CVS sur } \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n(t) \text{ est de classe } \mathcal{C}^0$$

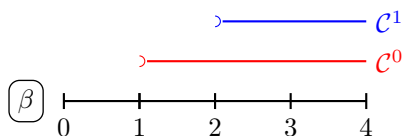
$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n \in \mathbb{N}} na_n, n \in \mathbb{N} \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} nb_n, n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right\} \text{CVA} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n(t) \text{ CVU} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n(t) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1$$

Exemples :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin nt}{n^\alpha} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \text{ si } \alpha > 1$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^\beta} \in \mathcal{C}^1 \text{ si } \beta > 2$$

$$\text{Car } |na_n| = \frac{1}{n^{\beta-1}}$$



4.2 Soit D l'ensemble des fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux telles que :

$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}, \forall x \in [0, 2\pi]$. On note $\mathcal{P}_N$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degrés $\leq N$. Montrer que $D = \mathcal{P}_N \oplus \mathcal{P}_N^\perp$. En déduire que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge.

Soit $D = \left\{ f \text{ } 2\pi \text{ périodique et continues par morceaux telles que } f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \forall x \in [0, 2\pi] \right\}$
où $f(x^\pm) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(x \pm h)$

$\mathcal{P}_N = \text{vect} \{e_k \mid -N \leq k \leq N\}$ où $e_k(t) = e^{ikt}$

Alors $D = \mathcal{P}_N \oplus \mathcal{P}_N^\perp$ et $\forall f \in D, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ converge.

Preuve :

Montrons que $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée pour le produit scalaire complexe $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$

Soit $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, on calcule $\langle e_k, e_l \rangle$. On a :

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_l \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} \overline{e^{ilt}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} dt \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ \left[\frac{e^{i(k-l)t}}{i(k-l)} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } k \neq l \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $f \in D$. On définit :

$$\mathcal{P}_N(f) = \sum_{k=-N}^N \langle f, e_k \rangle e_k \text{ la projection orthogonale de } f \text{ sur } \mathcal{P}_N$$

On remarque que $\langle f, e_k \rangle = c_k(f)$ et $\forall j \in [-N, N]$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f - \mathcal{P}_N(f), e_j \rangle &= \langle f, e_j \rangle - \sum_{k=-N}^N \langle f, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle \\ &= \langle f, e_j \rangle - \langle f, e_j \rangle \text{ car } \langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\implies f - \mathcal{P}_N(f) \in \text{vect}(e_j, j \in [-N, N])^\perp = \mathcal{P}_N^\perp$$

$$\implies \forall f \in D, f = \underbrace{f - \mathcal{P}_N(f)}_{\in \mathcal{P}_N^\perp} + \underbrace{\mathcal{P}_N(f)}_{\in \mathcal{P}_N}$$

$$\implies D = \mathcal{P}_N \oplus \mathcal{P}_N^\perp.$$

Convergence de la somme des $|C_n|^2$:

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \langle f, f \rangle \\ &= \|f - \mathcal{P}_N(f) + \mathcal{P}_N(f)\|^2 \\ &= \|f - \mathcal{P}_N(f)\|^2 + \|\mathcal{P}_N(f)\|^2 \text{ d'après Pythagore} \\ &\geq \|\mathcal{P}_N(f)\|^2\end{aligned}$$

$$\text{Or } \|\mathcal{P}_N(f)\|^2 = \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2.$$

On en déduit que $\forall N \in \mathbb{N}$, on a :

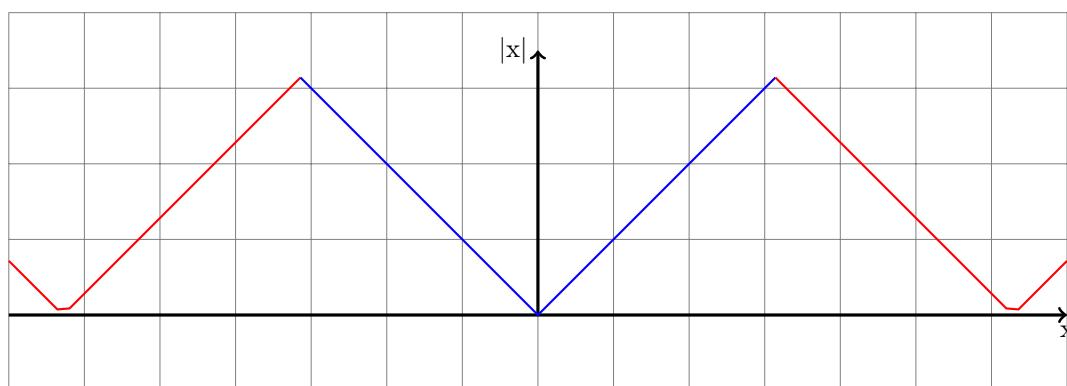
$$\sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2 \leq \|f\|^2$$

Donc la série converge car elle a termes positifs et est bornée.

Chapitre 5

Bonus

5.1 Développer en série de Fourier la fonction f 2π -périodique définie par $f(x) = |x|, \forall x \in [-\pi, \pi]$. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$



f paire $\implies b_n = 0$

g est $\mathcal{C}^1$ par morceau et continue. $\implies$ le théorème de Diriclet s'applique partout !

f continue donc $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x)$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[x \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{[\cos(nx)]_0^{\pi}}{n^2} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} & \text{si } n \geq 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2} & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\implies |x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x)$$

Calcul des séries :

On évalue le précédent résultat en 0, on obtient alors :

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$
$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Lorsqu'on fait le développement en série de Fourier de $h(t) = t^2$ on obtient :

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$$

On évalue alors ce résultat en $t = \pi$,

$$\implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$