Questions cours CC2

Proposé par : Baptiste Rébillard
Sur la base du cours de 2MIC de M. Noble Pascal

November 2022

Contents

Chapter 1

Séries de Fonctions

1.1 Donner la définition de la notion de convergence normale pour les séries de fonctions. Donner un exemple d'une série convergeant normalement.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de fonctions définies et bornées sur I,
on dit que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur I

$\displaystyle\iff \sum_{n\in\mathbb{N}} \underset{x\in I}{sup}|f_n(x)|$ converge

$\boxed{\textit{Exemple :}}$

Prenons $f_n(x) = -\frac{\ln x}{n^x}$
On examine la convergence normale.

$\underset{x\geq a}{sup}|f_n(x)| \leq \frac{\ln n}{n^a}$

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n^a}$ cv dès lors que $a > 1$ d'après les séries de Bertrand.

$\implies (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CVN donc CVU.

1.2 Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}, n \in \mathbb{N}^*$. Continuité de la fonction associée.

$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^x}$ CV sur $]0;+\infty[$

si $x \in [a;+\infty[$ avec $a \in]1;+\infty[$ on a :

$\displaystyle\underset{x\geq a>1}{sup}\left|\frac{(-1)^n}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^a}$ or $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^a}$ cv pour $a > 1$

donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^x}$ CVN donc CVU sur $[a;+\infty[$ $a > 1$

si $x \in]0;1]$ on a pas CVN $\longrightarrow$ il faut étudier directement la CVU
On a CVU sur $]0;1]$ si

$\underset{x\in]0,1]}{sup}|R_n(x)| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$

On applique le critère des séries alternées :

$|R_n(x)| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^x}\right| = \frac{1}{(n+1)^x}$

$\underset{\substack{x\in[\alpha,1]\\ \alpha>0}}{sup}|R_n(x)| \leq \underset{x\in[\alpha,1]}{sup}\frac{1}{(n+1)^\alpha}$

Ainsi la série de fonction CVU sur $[\alpha;1]$, $\alpha > 0$

On a CVU de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{n^x}$ donc $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ est continue sur $]0;+\infty[$ ainsi on a CVS sur $]0;+\infty[$ car $CVU \implies CVS$

1.3 Etudier la convergence simple et uniforme de la fonction $\zeta : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$. Continuité, comportement lorsque $x \to 1$.

$f_n(x) = \frac{1}{n^x} = \frac{1}{e^{x\ln n}}$

$\boxed{x \longrightarrow 1^+}$ CVS sur $n \in \mathbb{N}^* \implies$ CVS sur $x \in]1;\infty[$ d'après les séries de Riemann

Qu'en est-il de la CVU ?

Prenons $x \geq a > 1$

alors $\forall k \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^x} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^a}$

$\underset{x\geq a>1}{sup}|R_n(x)| \leq R_n(a) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^a}$ cv d'après les séries de Riemann ($a > 1$)

Donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^x}$ CVU sur $[a;+\infty[$ $\forall a > 1$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^x}$ continue sur $[a;+\infty[$ $\forall a > 1$

donc continue sur $]1;+\infty[$

$\boxed{x \longrightarrow 1^-}$ Lorsque $x \longrightarrow 1$, on a $\sum\frac{1}{n}$ qui diverge d'après les séries de Riemann

Chapter 2

Espaces Vectoriels Normés

2.1 Montrer que l'application $N_1 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $N_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$ est une norme. Représenter l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N_1((x, y)) \leq 1$

Afin de prouver que N_1 est une norme, nous devons prouver les 3 propriétés définissant une norme.

$\boxed{\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0}$

Soit $(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} N_1((x_1, ..., x_d)) = 0 &\iff \sum_{i=1}^{d} |x_i| = 0_{\mathbb{R}} \textbf{ or } |x_i| \geq 0 \\ &\iff |x_i| = 0 \ \forall i \in [|1, d|] \\ &\iff x_i = 0 \ \forall i \in [|1, d|] \\ &\iff (x_1, ..., x_d) = 0_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

$\boxed{\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)}$

Soit $(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$, Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} N_1(\lambda(x_1, ..., x_d)) &= N_1((\lambda x_1, ..., \lambda x_d)) \\ &= \sum_{i=1}^{d} |\lambda x_i| \\ &= |\lambda| \sum_{i=1}^{d} |x_i| \\ &= |\lambda| N_1((x_1, ..., x_d)) \end{aligned}$$

$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)}$

Soient $(x_1, ..., x_d), (y_1, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
N_1((x_1, ..., x_d) + (y_1, ..., y_d)) &= N_1((x_1 + y_1, ..., x_d + y_d)) \\
&= \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i| \in \mathbb{R} \implies \textbf{inégalité triangulaire dans } \mathbb{R} \\
&\leq \sum_{i=1}^{d} |x_i| + \sum_{i=1}^{d} |y_i| \\
&\leq N((x_1, ..., x_d)) + N((y_1, ..., y_d))
\end{aligned}$$

Ainsi N_1 est une norme de $\mathbb{R}^d$.

Représentation de l'ensemble :

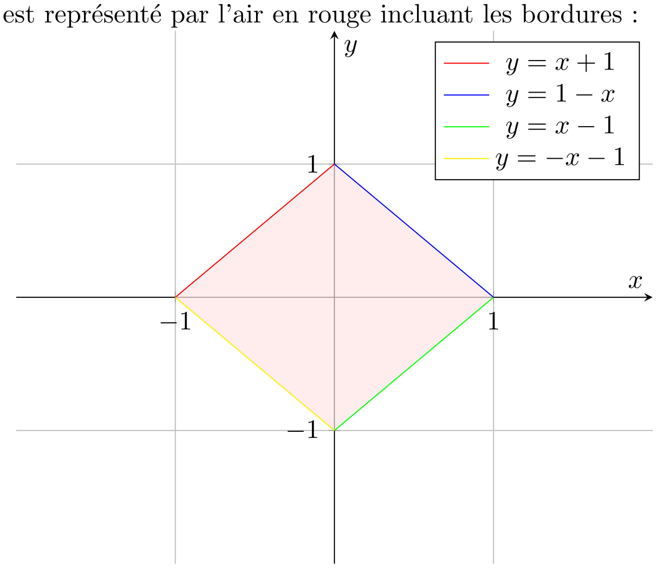
Notons E_1 l'ensemble qu'on cherche à représenter,

$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | N_1((x, y)) \leq 1\}$
$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ |x| + |y| \leq 1\} = \overline{B_{||.||_1}}(0, 1)$

On fait ensuite une disjonction de cas :

x et y positifs
z et y négatifs
x négatif et y positif
x positif et y négatif

E est représenté par l'air en rouge incluant les bordures :



2.2 Sur $\mathbb{C}[x]$ l'ensemble des polynomes à coefficients complexes, on définit, avec $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$: $||p||_\infty = \underset{k\in[|0,n|]}{max}(|a_k|), ||P||_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ Montrer que ce sont des normes et qu'elles ne sont pas équivalentes

Montrons que ce sont des normes :
On va noter N_1 la norme 1 ($||.||_1$), N_2 la norme 2 ($||.||_2$) et N_∞ la norme infinie ($||.||_\infty$).

$\boxed{\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0}$

Soit $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}_n[x]$,

$$\begin{aligned}
N_1((a_0, ..., a_n)) = 0 &\iff \sum_{i=0}^{n} |a_i| = 0 \textbf{ or } |x_i| \geq 0 \\
&\iff |a_i| = 0 \ \forall i \in [|0, n|] \\
&\iff a_i = 0 \ \forall i \in [|0, n|] \\
&\iff (a_0, ..., a_n) = 0_{\mathbb{C}_n[x]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_\infty((a_0, ..., a_n)) = 0 &\iff \underset{k\in[|0,n|]}{max}(|a_k|) = 0 \\
&\iff (a_0, ..., a_n) = 0_{\mathbb{C}_n[x]} \textbf{ car } |a_k| \geq 0, \forall k \in [|0, n|]
\end{aligned}$$

$\boxed{\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)}$

Soit $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}_n[x]$, Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
N_1(\lambda(a_0, ..., a_n)) &= N_1((\lambda \cdot a_0, ..., \lambda \cdot a_n)) \\
&= \sum_{i=0}^{n} |\lambda a_i| \\
&= |\lambda| \sum_{i=0}^{n} |a_i| \\
&= |\lambda| N_1((a_0, ..., a_n))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_\infty(\lambda(a_0, ..., a_n)) &= N_\infty((\lambda \cdot a_0, ..., \lambda \cdot a_n)) \\
&= \underset{k\in[|0,n|]}{max}(|\lambda| \cdot |a_k|) \\
&= |\lambda| \cdot \underset{k\in[|0,n|]}{max}(|a_k|) \\
&= |\lambda| \cdot N_\infty((a_0, ..., a_n))
\end{aligned}$$

$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)}$

Soient $(a_0, ..., a_n), (b_0, ..., b_n) \in \mathbb{C}_n[x]$,

$$\begin{aligned}
N_1((a_0, ..., a_n) + (b_0, ..., b_n)) &= N_1((a_0 + b_0, ..., a_n + b_n)) \\
&= \sum_{i=0}^{n} |a_i + b_i| \implies \textbf{inégalité triangulaire dans } \mathbb{R} \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} |a_i| + \sum_{i=0}^{n} |b_i| \\
&\leq N_1((a_0, ..., a_n)) + N_1((b_0, ..., b_n))
\end{aligned}$$

$$N_\infty((a_0, ..., a_n) + (b_0, ..., b_n))^2 \leq N_\infty((a_0, ..., a_n)) + N_\infty((b_0, ..., b_n))$$

$$\text{évident car : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, max(|x, y|) \leq max(|x|) + max(|y|)$$

Ainsi N_1 et N_∞ sont des normes de $\mathbb{C}_n[x]$.

Montrons la non équivalence de ces normes :

Avec $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} X^k$ (càd $a_k = 1$), on a :

$||P_n||_\infty = 1$,

$||P_n||_1 = n + 1$,

On va résonner par l'absurde et supposer que ces normes sont équivalentes,

Supposons : $\exists (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$,

$\forall P \in \mathbb{C}[x]$,

$$a \times ||P||_\infty \leq ||P||_1 \leq b \times ||P||_\infty$$

Avec $P_n \in \mathbb{C}[x]$,

$$a \leq n + 1 \leq b$$

On a donc contradiction lorsque n tend vers l'infini

$\implies$ les normes 1 et ∞ ne sont pas équivalentes

2.3 Montrer que si E est de dimension finie, toute application $f : E \to F$ où F est un EVN est continue.

On pose $(e_1, ..., e_n)$ base de E,

$\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $||x||_\infty = \underset{1<i<n}{max} |x_i|$

On a $f \in \mathscr{L}(E, F)$,

$$\begin{aligned}
||f(x)||_F &= \left\| f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right\|_F \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right\|_F \quad \text{car f est linéaire} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|f(e_i)\|_F \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F\right)}_{=c\geq 0} \|x\|_\infty
\end{aligned}$$

Donc $f : (E, ||.||_\infty) \longrightarrow (F, ||.||_F)$ est continue
$\Longrightarrow$ f continue car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie !

2.4 Soit E et F des EVN et $f : E \to F$ une application linéaire continue. Que signifie $|||f|||$? Donner un exemple.

$|||f||| = \underset{\substack{x\in E \\ ||x||_E=1}}{sup} ||f(x)||_F = \underset{\substack{x\in E \\ x\neq 0}}{sup} \dfrac{||f(x)||_F}{||x||_E}$

Exemple :
$E = \mathcal{C}^0([a, b])$

$$\begin{aligned}
u : (E, ||.||_\infty) &\longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) \\
f &\longmapsto \int_a^b f(t).dt
\end{aligned}$$

$\forall f \in E$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t).dt\right| &\leq \int_a^b |f(t)|.dt \\
&\leq \int_a^b \underset{t\in[a,b]}{sup} |f(t)|.dt \text{ Or le sup est constant sur t} \\
&\leq (b-a)||f||_\infty
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \forall f \in E, |u(f)| \leq (b-a) \times ||f||_\infty$

si $f \neq 0$, $\dfrac{|u(f)|}{||f||_\infty} \leq b-a \Longrightarrow \underset{x\in[a,b]}{sup} \dfrac{|u(f)|}{||f||_\infty} \leq \underset{x\in[a,b]}{sup} (b-a) \Longrightarrow |||u||| \leq b-a$

Soit $f(x) = 1$, $||f||_\infty = 1$
$u(f) = \displaystyle\int_a^b 1.dt = b-a \Longrightarrow b-a = \dfrac{|u(f)|}{||f||_\infty} \leq |||u|||$
$\Longrightarrow |||u||| = b-a$ par encadrement

Chapter 3

Réduction d'endomorphismes

3.1 Définir la notion de sous espace vectoriel stable. Montrer que si u et v commutent alors $Ker(u)$ est stable par v.

E est un EV, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Soit $F \subset E$ un SEV de E,

$$\text{F stable par u} \iff u(F) \subset F$$

Démonstration de la stabilité :

Soit $x \in ker(u)$.
Montrons que $v(x) \in ker(u)$
$u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$
Donc $v(x) \in ker(u) \implies ker(u)$ stable par v.

3.2 Rappeler la définition d'un sous espace propre associé à $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que des espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

$(u, \lambda) \in \mathcal{L}(E) \times \mathbb{K}$,
Sous espace propre : $E_\lambda = Ker(u - \lambda I_{d_E})$

$\boxed{Preuve}$

On fait la preuve dans $E = \mathbb{K}^n$

Soit $x_i \in E_{\lambda_i}$ (avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$) tel que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} x_i = 0_{\mathbb{K}^n}$

Montrer que $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0_{\mathbb{K}^n}$

On fait agir u plusieurs fois :

$u\left(\sum_{i=1}^r x_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = 0_{\mathbb{K}^n}$

$u\left(u\left(\sum_{i=1}^r x_i\right)\right) = u\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^2 x_i = 0_{\mathbb{K}^n}$

... On continue ce procédé jusqu'a r-1 :
$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{r-1} x_i = 0_{\mathbb{K}^n}$
En résonnant par coordonnées, Soit $i \in [\![1;n]\!]$, càd pour la i-ème coordonnées on a :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{r} x_k^i & = 0 \\ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k^i & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{r-1} x_k^i & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_r^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On reconnait (apparement) une matrice de Vandermonde qui est inversible $\iff$ tout les λ_i sont distincts.
$\implies x_1^i = \cdots = x_r^i = 0$ avec $\forall i \in [\![1;n]\!]$
$(x_i)_{i \in [\![1;r]\!]}$ libre

3.3 Montrer qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynome caractéristique est scindé et $dim(E_\lambda) = m_\lambda$.

On cherche à montrer : u diagonalisable $\iff$ p_u est scindé et $\forall \lambda \in Sp(u), dim(E_\lambda) = m_\lambda$

$\boxed{\Rightarrow}$

u diagonalisable $\implies E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} \implies B = (B_1, ..., B_r)$ une base

$$\text{Soit } A = Mat(u,B) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}}_{dim(E_{\lambda_1})} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\begin{matrix} \lambda_r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{matrix}}_{dim(E_{\lambda_r})} \end{pmatrix}$$

Donc $p_A(x) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - x)^{dim E_{\lambda_i}} = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - x)^{m_{\lambda_i}}$

$\boxed{\Leftarrow}$

p_A scindé dans $\mathbb{K}$, toutes les valeurs propres de u sont dans $\mathbb{K}$. On les note : $\lambda_1, ..., \lambda_r$,
On a $\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} \subset E$

et $p_A(x) = \prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - x)^{m_{\lambda_i}}$

$\implies \sum_{i=1}^{r} m_{\lambda_i} = d$

D'ou $dim\left(\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}\right) = d$

$\implies \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = E$

3.4 Montrer qu'une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynome caractéristique est scindé

On cherche à montrer que $\forall A \in M_d(\mathbb{K})$, A trigonalisable $\iff$ P_A scindé dans $\mathbb{K}$

$\boxed{\Rightarrow}$

$\exists P \in G_{L_d}(\mathbb{K}) \iff$ linéaire inversible de dimension d,

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_d \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

d'où $P_A(x) = \prod_{i=1}^{d}(\lambda_i - x)$

$\implies P_A$ est scindé.

$\boxed{\Leftarrow}$

Par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^*$ avec $d = dim(E)$

"P_A scindé dans $\mathbb{K}$" est l'hypothèse de récurrence ($= H_d$).

<u>Initialisation :</u> $d = 1$ OK.

<u>Hérédité :</u> On cherche à montrer que $H_d \implies H_{d+1}$

Soit $A \in M_{d+1}(\mathbb{K})$. P_A scindé

$\implies \exists \lambda \in \mathbb{K} | \lambda \in Sp(A)$

Soit $e_0 \in \mathbb{K}^{d+1} \backslash \{0\}$, $Ae_0 = \lambda e_0$

On complète en une base $(e_0, \cdots, e_d)$ de $\mathbb{K}^d$

$\implies \exists P \in G_{L_d}(\mathbb{K})$ tel que :

$$P \cdot A \cdot P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$

$B \in M_d(\mathbb{K})$, $P_A(x) = (\lambda_0 - x)P_B(x)$

P_B scindé $\implies \exists Q \in G_{L_d}(\mathbb{K})$ tel que :

$QBQ^{-1} = T \in M_d(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure

$$\tilde{Q}(PAP^{-1}).\tilde{Q}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array}\right)$$

avec $\tilde{Q} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & Q \\ 0 & \end{array}\right)$ et $\tilde{Q}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & Q^{-1} \\ 0 & \end{array}\right)$

$$\implies (\tilde{Q}P)A(\tilde{Q}P)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & T \\ 0 & \end{array}\right)$$

<u>Bilan :</u> $H_d \implies H_{d+1}$

CQFD