

Démos Khôlle Espaces Vectoriels Normés

Proposé par : Baptiste Rébillard, Leandro Rodriguez,
Elsa Ehrhart, Marie-Line Da Costa Bento
Sur la base du cours de 2MIC de M. Noble Pascal

October 2022

Contents

- 1 Donner la définition d'une norme. Donner deux exemples de norme sur $\mathbb{R}^2$ 2
- 2 Montrer que l'application $N_1 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $N_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$ est une norme. Représenter l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N_1((x, y)) \leq 1$ 2
- 3 Soient N_1, N_2 deux normes sur un espace vectoriel E . Que signifie N_1 et N_2 sont équivalentes ? Donner un exemple. Que peut-on dire en dimension finie ? 3
- 4 Sur $\mathbb{C}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, on définit, avec $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$:
$$\|p\|_\infty = \max_{k \in [0, n]} (|a_k|), \|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|, \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^n |a_k|^2}$$

Montrer que ce sont des normes et qu'elles ne sont pas équivalentes 4
- 5 Soit E un EVN muni d'une norme E : montrer que cette norme est continue 7
- 6 Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R})$, montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ converge pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. 7
- 7 Donner tous les critères de continuité d'une application linéaire entre EVN. Donner un exemple d'application linéaire continue 8
- 8 Montrer que si E est de dimension finie, toute application $f : E \rightarrow F$ où F est un EVN est continue. 9
- 9 Donner la définition d'une suite convergente dans un EVN. Donner un exemple en dimension finie et un exemple en dimension infinie. 9
- 10 Donner un critère de convergence des séries à valeurs dans un EVN. Donner un exemple. 10
- 11 Soit E et F des EVN et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire continue. Que signifie $\|f\|$? Donner un exemple. 10
- 12 Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\phi : f \rightarrow f(1) - f(0)$. Etudier la continuité de ϕ et calculer sa norme 11

1 Donner la définition d'une norme. Donner deux exemples de norme sur $\mathbb{R}^2$

Une norme sur E est une application de $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ respectant 3 conditions :

- $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$
- $\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

Exemple 1 :

$$E = \mathbb{R}, N(x) = |x|$$

Exemple 2 :

$$E = \mathbb{R}^2,$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^2 |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^2 x_i^2} \text{ (Norme euclidienne canonique associée au produit scalaire)}$$

2 Montrer que l'application $N_1 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $N_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$ est une norme. Représenter l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N_1((x, y)) \leq 1$

Afin de prouver que N_1 est une norme, nous devons prouver les 3 propriétés définissant une norme.

$$\boxed{\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0}$$

Soit $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} N_1((x_1, \dots, x_d)) = 0 &\iff \sum_{i=1}^d |x_i| = 0 \text{ or } |x_i| \geq 0 \\ &\iff |x_i| = 0 \forall i \in [1, d] \\ &\iff x_i = 0 \forall i \in [1, d] \\ &\iff (x_1, \dots, x_d) = 0_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)}$$

Soit $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} N_1(\lambda(x_1, \dots, x_d)) &= N_1((\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)) \\ &= \sum_{i=1}^d |\lambda x_i| \\ &= |\lambda| \sum_{i=1}^d |x_i| \\ &= |\lambda| N_1((x_1, \dots, x_d)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)}$$

Soient $(x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} N_1((x_1, \dots, x_d) + (y_1, \dots, y_d)) &= N_1((x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)) \\ &= \sum_{i=1}^d |x_i + y_i| \in \mathbb{R} \implies \text{inégalité triangulaire dans } \mathbb{R} \\ &\leq \sum_{i=1}^d |x_i| + \sum_{i=1}^d |y_i| \\ &\leq N((x_1, \dots, x_d)) + N((y_1, \dots, y_d)) \end{aligned}$$

Ainsi N_1 est une norme de $\mathbb{R}^d$.

Représentation de l'ensemble :

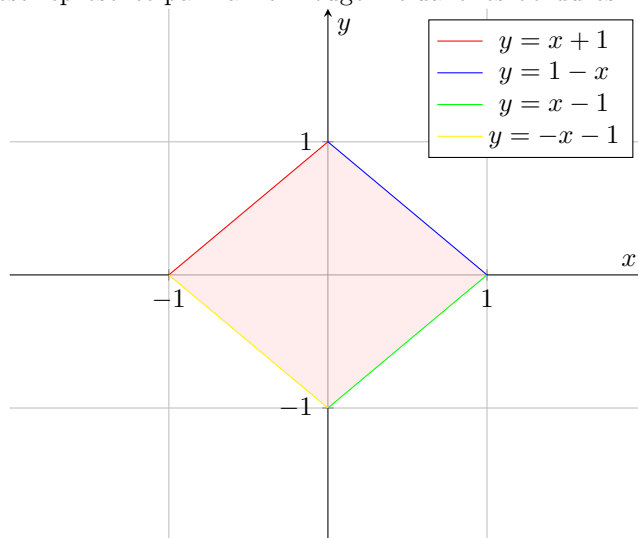
Notons E_1 l'ensemble qu'on cherche à représenter,

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid N_1((x, y)) \leq 1\} \\ E_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\} = \overline{B_{\|\cdot\|_1}}(0, 1) \end{aligned}$$

On fait ensuite une disjonction de cas :

x et y positifs
 x et y négatifs
 x négatif et y positif
 x positif et y négatif

E est représenté par l'air en rouge incluant les bordures :



3 Soient N_1, N_2 deux normes sur un espace vectoriel E . Que signifie N_1 et N_2 sont équivalentes ? Donner un exemple. Que peut-on dire en dimension finie ?

Soit E un espace vectoriel normé muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ équivalentes $\iff \exists (c, c') \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in E, c \times \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c' \times \|x\|_1$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont équivalents $\forall (p, q) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^2$

EN dim finie ?

Dans un EVN en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes !

4 Sur $\mathbb{C}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, on définit, avec $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$:

$$\|p\|_\infty = \max_{k \in [0, n]} (|a_k|), \|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|, \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^n |a_k|^2}$$

Montrer que ce sont des normes et qu'elles ne sont pas équivalentes

Montrons que ce sont des normes :

On va noter N_1 la norme 1 ($\|\cdot\|_1$), N_2 la norme 2 ($\|\cdot\|_2$) et N_∞ la norme infinie ($\|\cdot\|_\infty$).

$$\boxed{\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0}$$

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}_n[x]$,

$$\begin{aligned} N_1((a_0, \dots, a_n)) = 0 &\iff \sum_{i=0}^n |a_i| = 0 \text{ or } |x_i| \geq 0 \\ &\iff |a_i| = 0 \forall i \in [0, n] \\ &\iff a_i = 0 \forall i \in [0, n] \\ &\iff (a_0, \dots, a_n) = 0_{\mathbb{C}_n[x]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2((a_0, \dots, a_n)) = 0 &\iff \sqrt{\sum_{i=0}^n |a_i|^2} = 0 \\ &\iff \sum_{i=0}^n |a_i|^2 = 0 \text{ or } |x_i| \geq 0 \\ &\iff |a_i|^2 = 0 \forall i \in [0, n] \\ &\iff |a_i| = 0 \forall i \in [0, n] \\ &\iff a_i = 0 \forall i \in [0, n] \\ &\iff (a_0, \dots, a_n) = 0_{\mathbb{C}_n[x]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_\infty((a_0, \dots, a_n)) = 0 &\iff \max_{k \in [0, n]} (|a_k|) = 0 \\ &\iff (a_0, \dots, a_n) = 0_{\mathbb{C}_n[x]} \text{ car } |a_k| \geq 0, \forall k \in [0, n] \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)}$$

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}_n[x]$, Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
 N_1(\lambda(a_0, \dots, a_n)) &= N_1((\lambda \cdot a_0, \dots, \lambda \cdot a_n)) \\
 &= \sum_{i=0}^n |\lambda a_i| \\
 &= |\lambda| \sum_{i=0}^n |a_i| \\
 &= |\lambda| N_1((a_0, \dots, a_n))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_2(\lambda(a_0, \dots, a_n)) &= N_2((\lambda \cdot a_0, \dots, \lambda \cdot a_n)) \\
 &= \sqrt{\sum_{i=0}^n |\lambda a_i|^2} \\
 &= \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{i=0}^n |a_i|^2} \\
 &= |\lambda| \sqrt{\sum_{i=0}^n |a_i|^2} \\
 &= |\lambda| N_2((a_0, \dots, a_n))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_\infty(\lambda(a_0, \dots, a_n)) &= N_\infty((\lambda \cdot a_0, \dots, \lambda \cdot a_n)) \\
 &= \max_{k \in [0, n]} (|\lambda| \cdot |a_k|) \\
 &= |\lambda| \cdot \max_{k \in [0, n]} (|a_k|) \\
 &= |\lambda| \cdot N_\infty((a_0, \dots, a_n))
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)}$$

Soient $(a_0, \dots, a_n), (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{C}_n[x]$,

$$\begin{aligned}
N_1((a_0, \dots, a_n) + (b_0, \dots, b_n)) &= N_1((a_0 + b_0, \dots, a_n + b_n)) \\
&= \sum_{i=0}^n |a_i + b_i| \implies \text{inégalité triangulaire dans } \mathbb{R} \\
&\leq \sum_{i=0}^n |a_i| + \sum_{i=0}^n |b_i| \\
&\leq N_1((a_0, \dots, a_n)) + N_1((b_0, \dots, b_n))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2((a_0, \dots, a_n) + (b_0, \dots, b_n)) &= N_2((a_0 + b_0, \dots, a_n + b_n)) \\
&= \sqrt{\sum_{i=0}^n |a_i + b_i|^2} \implies \text{inégalité triangulaire dans } \mathbb{R} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=0}^n |a_i|^2 + \sum_{i=0}^n |b_i|^2} \text{ or, } \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=0}^n |a_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=0}^n |b_i|^2} \\
&\leq N_\infty((a_0, \dots, a_n)) + N_\infty((b_0, \dots, b_n))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_\infty((a_0, \dots, a_n) + (b_0, \dots, b_n))^2 &\leq N_\infty((a_0, \dots, a_n))^2 + N_\infty((b_0, \dots, b_n))^2 \\
&\text{évident car : } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(|x, y|) \leq \max(|x|) + \max(|y|)
\end{aligned}$$

Ainsi N_1, N_2 et N_∞ sont des normes de $\mathbb{C}_n[x]$.

Montrons la non équivalence de ces normes :

Avec $P_n(X) = \sum_{k=0}^n X^k$ (càd $a_k = 1$), on a :

$$\begin{aligned}
\|P_n\|_\infty &= 1, \\
\|P_n\|_1 &= n+1, \\
\|P_n\|_2 &= \sqrt{n+1}
\end{aligned}$$

On va raisonner par l'absurde et supposer que ces normes sont équivalentes,

Supposons : $\exists (a, b, c, d, e, f) \in (\mathbb{R}^{+*})^6$,
 $\forall P \in \mathbb{C}[x]$,

$$a \times \|P\|_\infty \leq \|P\|_1 \leq b \times \|P\|_\infty \quad (1)$$

$$c \times \|P\|_\infty \leq \|P\|_2 \leq d \times \|P\|_\infty \quad (2)$$

$$e \times \|P\|_1 \leq \|P\|_2 \leq f \times \|P\|_1 \quad (3)$$

Avec $P_n \in \mathbb{C}[x]$,

$$a \leq n+1 \leq b \quad (1)$$

$$a \leq \sqrt{n+1} \leq b \quad (2)$$

$$a \times (n+1) \leq \sqrt{n+1} \leq b \times (n+1) \quad (3)$$

On a donc contradiction pour les équation (1) et (2) lorsque n tend vers l'infini
 $\implies$ les normes 1 et 2 ne sont pas équivalentes avec la norme infinie.

Pour ce qui est de la norme 1 et 2 entre elles, reprenons l'équation (3),

$$(3) \iff a \leq \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \leq b \text{ car } n \in \mathbb{N} \implies n \neq -1$$

$$\iff a \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq b$$

ce qui est contradictoire lorsque n tend vers l'infini car $a \in \mathbb{R}^{+*}$
 $\implies$ Les normes 1 et 2 ne sont pas équivalentes entre elles.

5 Soit E un EVN muni d'une norme E : montrer que cette norme est continue

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}$, Soit $x_0 \in E$ et $x \in B(x_0, \epsilon)$ ($= \{x \in E, \|x - x_0\| < \epsilon\}$)

Alors $\|x - x_0\| < \epsilon$

Avec la seconde inégalité triangulaire on a :

$$\| \|x\| - \|x_0\| \| \leq \|x - x_0\| < \epsilon$$

Ainsi la norme est Lipschitzienne car :

$$\exists k > 0, \forall (x, y) \in E^2, \|N(x) - N(y)\|_F \leq k \times \|x - y\|_E,$$

en l'occurrence :

$$\exists k = 1, \forall (x, x_0) \in E^2, \|N(x) - N(x_0)\| \leq \|x - x_0\|$$

$\|\cdot\|$ est Lipschitzienne $\iff \|\cdot\|$ est continue sur E

6 Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1[; \mathbb{R})$, montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ converge pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1[, \mathbb{R})$ muni des normes 1 ($\|\cdot\|_1$) et infinie ($\|\cdot\|_\infty$)
 $f_n(x) = x^n$

Norme 1 :

On cherche : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_1 = 0$

$\forall x \in [a, b] \subset [0, 1[, f_n \text{ cvu vers } 0 \implies f(x) = 0$

$$\begin{aligned} \|x_n - 0\|_1 &= \int_a^b |x^n| dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b \\ &= \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - 0\|_1 = 0 \implies f_n \text{ cv pour la norme 1}$

Norme infinie :

$$\begin{aligned} \|x^n - 0\|_\infty &= \sup_{x \in [0,1[} x^n = 1^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - 0\|_\infty &= 1 \implies \text{ne cv pas avec la norme infinie} \end{aligned}$$

7 Donner tous les critères de continuité d'une application linéaire entre EVN. Donner un exemple d'application linéaire continue

Soit $f \in L(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) f continue sur $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$
- (2) f continue en 0_E pour les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.
- (3) f borné sur $\overline{B}(0, 1) \iff \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \overline{B}(0, 1), \|f(x)\|_F \leq M$
- (4) $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \times \|x\|_E$
- (5) f est Lipschitzienne $\iff \exists k > 0, \forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \times \|x - y\|_E$

Exemple :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, x - y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)}$$

$$|f(x, y)_1| = |x + y| \leq |x| + |y| \leq 2\|(x, y)\|$$

$$|f(x, y)_2| = |x - y| \leq |x| + |y| \leq 2\|(x, y)\|$$

$$\begin{aligned} \implies \|f(x, y)\|_\infty &\leq 2\|(x, y)\|_\infty \\ \implies f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \text{ continue} \implies \text{continue sur la norme infinie} \end{aligned}$$

$$\boxed{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)}$$

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\|_1 &= |x + y| + |x - y| \\ &\leq |x| + |y| + |x| + |y| \\ &\leq 2\|(x, y)\|_1 \end{aligned}$$

$$\implies f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \text{ continue} \implies \text{continue sur la norme 1}$$

$$\boxed{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)}$$

$$\begin{aligned} \|f(x, y)\|_2^2 &= (x + y)^2 + (x - y)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + y^2 - 2xy \\ &= 2(x^2 + y^2) \\ &= x\|(x, y)\|_2^2 \implies \|f(x, y)\|_2 \leq \sqrt{2} \cdot \|(x, y)\|_2 \end{aligned}$$

$$\implies f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \text{ continue} \implies \text{continue sur la norme 2}$$

En réalité, on choisit une des 3 normes car en dimension finie (ici $\dim = 2$), toutes les normes sont équivalentes.

8 Montrer que si E est de dimension finie, toute application $f : E \rightarrow F$ où F est un EVN est continue.

On pose $(e_1, \dots, e_n)$ base de E ,

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

On a $f \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_F &= \left\| f \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\|_F \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \right\|_F \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|f(e_i)\|_F \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|_F \right)}_{=c \geq 0} \|x\|_\infty \end{aligned}$$

Donc $f : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ est continue

$\Rightarrow f$ continue car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie !

9 Donner la définition d'une suite convergente dans un EVN. Donner un exemple en dimension finie et un exemple en dimension infinie.

Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ cv dans $(E, \|\cdot\|_E)$

$$\iff \exists f \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n - f\|_E = 0$$

$$\iff \exists f \in E, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|U_n - f\|_E \leq \epsilon$$

Exemple :

Dimension finie

$$E = \mathbb{R}^d, (U_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$(U_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{d}{n} \right)$$

$$\|U_n\|_\infty = \max\left(\frac{1}{n}, i \in [1, d]\right) = \frac{d}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\|_\infty = 0 \implies (U_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ cv vers } O_E \text{ pour } \|\cdot\|_\infty$$

Dimension infinie

$$E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), f_n(x) = x^n(1 - x)$$

Dérivons $f_n(x)$ dans l'optique de faire un tableau de variation :

$$f'_n(x) = x^{n-1}(n + x[-1 - n]) \implies \text{la dérivée s'annule sur } 0 \text{ et sur } \frac{n}{n+1}$$

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

x	0	$\frac{n}{n+1}$	1
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	$f_n(\frac{n}{n+1})$	0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} \left| f_n \left(\frac{n}{n+1} \right) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \left(\frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp^{-1} \cdot \frac{1}{n+1} = 0$$

Ainsi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv vers 0_E

10 Donner un critère de convergence des séries à valeurs dans un EVN. Donner un exemple.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un EVN, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|U_n\|_E \text{ converge} + E \text{ est de dimension finie} \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n \text{ converge}$$

Exemple :

On se place dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} U_n \text{ CVA et } \mathbb{R} \text{ est de dimension finie} \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n \text{ CV}$$

11 Soit E et F des EVN et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire continue. Que signifie $\|f\|$? Donner un exemple.

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|f(x)\|_F = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

Exemple :

$$E = C^0([a, b])$$

$$u : (E, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

$$f \longmapsto \int_a^b f(t).dt$$

$$\forall f \in E,$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t).dt \right| &\leq \int_a^b |f(t)|.dt \\ &\leq \int_a^b \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.dt \text{ Or le sup est constant sur } t \\ &\leq (b-a) \|f\|_\infty \end{aligned}$$

$$\implies \forall f \in E, |u(f)| \leq (b-a) \times \|f\|_\infty$$

$$\text{si } f \neq 0, \frac{|u(f)|}{\|f\|_\infty} \leq b-a \implies \sup_{x \in [a,b]} \frac{|u(f)|}{\|f\|_\infty} \leq \sup_{x \in [a,b]} (b-a) \implies \|u\| \leq b-a$$

Soit $f(x) = 1$, $\|f\|_\infty = 1$

$$u(f) = \int_a^b 1 \cdot dt = b - a \implies b - a = \frac{|u(f)|}{\|f\|_\infty} \leq \|u\|$$

$\implies \|u\| = b - a$ par encadrement

12 Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\phi : f \rightarrow f(1) - f(0)$. Etudier la continuité de ϕ et calculer sa norme

$\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\iff \exists K > 0, \forall f \in E, |\phi(f)| \leq K \cdot \|f\|_\infty$ (ϕ est linéaire)

Soit $f \in E$. On a :

$$\begin{aligned} |\phi(f)| &= |f(1) - f(0)| \\ &\leq |f(1)| + |f(0)| \\ &\leq 2 \cdot \|f\|_\infty \end{aligned}$$

$\implies \phi$ continue.

Calcul de la norme :

$\forall f \neq 0$,

$$\begin{aligned} |\phi(f)| &\leq 2 \cdot \|f\|_\infty \\ \frac{|\phi(f)|}{\|f\|_\infty} &\leq 2 \\ \|\phi\| &\leq 2 \end{aligned}$$

Prenons arbitrairement $f(x) = 2x - 1 \neq 0$,

$$\frac{|\phi(f)|}{\|f\|_\infty} = 2 \implies \|\phi\| \geq 2$$

Par encadrement,

$$\|\phi\| = 2$$