

PTITE FICHE

CHAPITRE 1

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adjacentes $\Leftrightarrow \begin{cases} (U_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{décroissante} \\ (V_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{croissante} \\ U_n - V_n & \text{cv vers } 0 \end{cases}$

série $= (U_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}} =$ suite de sommes partielles.
 $= \sum u_n, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = U_n + R_n \Rightarrow R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ cv} \\ \sum v_n, n \in \mathbb{N} \text{ cv} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \sum (\alpha u_n + \beta v_n), n \in \mathbb{N} \text{ cv} \\ \text{et } \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} v_n \end{cases}$$

$$\sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ cv} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite réelle à termes positifs $\left. \vphantom{\sum u_n} \right\} \Rightarrow \sum u_n, n \in \mathbb{N} > 0$ est croissante

série > 0 cv $\Leftrightarrow$ suite des sommes partielles est majorée
 à termes positifs $\hookrightarrow$ sinon diverge vers ∞ .

$$u_n \leq v_n, v_n \in \mathbb{N}$$

$$\hookrightarrow \sum v_n, n \in \mathbb{N} \text{ cv} \Rightarrow \sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ cv}$$

$$\hookrightarrow \sum v_n, n \in \mathbb{N} \text{ dv} \Rightarrow \sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ dv}$$

à termes positifs !!!

$\left. \begin{array}{l} v_n > 0 \\ u_n \sim v_n \end{array} \right\} \Rightarrow$
 fonctionne aussi

Cauchy: $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à terme positifs

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell \Rightarrow \begin{cases} \sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ cv} & \text{si } \ell < 1 \\ \sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ dv} & \text{si } \ell > 1 \\ \text{ne sait pas} & \text{si } \ell = 1 \end{cases}$$

$$\ln x < x < x^\alpha < e^x$$

$$\begin{aligned}\sin x &\sim x \\ \sinh x &\sim x \\ \tan x &\sim x \\ \ln(1+x) &\sim x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arcsin x &\sim x \\ \operatorname{Arsh} x &\sim x \\ e^x - 1 &\sim x \\ \tanh x &\sim x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x - 1 &\sim -\frac{x^2}{2} \\ (1+x)^\alpha - 1 &\sim \alpha x \quad \forall \alpha \neq 0 \\ \cosh x - 1 &\sim \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

Alémbert : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ terme strictement positif

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \Rightarrow \begin{cases} \sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ cv} & \text{si } \ell < 1 \\ \sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ dv} & \text{si } \ell > 1 \\ \text{ne peut rien dire} & \text{si } \ell = 1 \end{cases}$$

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \quad (n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+ \Rightarrow \text{Cauchy ou Alémbert inopérant.} \\ \Rightarrow \text{Riemann, cv si } \alpha > 1$$

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$ et décroissante, $\forall n \geq 1$,

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

$$\int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^N f(n) \leq \int_0^N f(t) dt$$

$\sum |u_n|, n \in \mathbb{N} \text{ cv} \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ absolument convergent.}$
 $\hookrightarrow$ toute suite absolument convergente est convergente.

$\sum u_n, n \in \mathbb{N}$ est semi convergente $\Leftrightarrow$ pas absolument convergente

théorème des
séries
alternées

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \exists (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante vers 0, $u_n = (-1)^n v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
 $\hookrightarrow \sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ cv}$ on dit que $\sum u_n, n \in \mathbb{N}$ est alternée.
 $\hookrightarrow (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes
 $\hookrightarrow R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

$$\sum q^n, n \in \mathbb{N} \text{ cv} \Leftrightarrow |q| < 1$$

$$\hookrightarrow \text{et } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad (\text{si } |q| < 1)$$

Séries de Bertrand: $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}, n \geq 2$ $\begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha = 1, \beta > 1 \end{cases}$ cv dv si $\alpha < 1$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs:

$$[\exists c > 0, q \in [0, 1[\text{ et } N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq cq^n] \Rightarrow \sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ cv}$$

$$[\exists c > 0, q \geq 1 \text{ et } n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq cq^n] \Rightarrow \sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ dv}$$

Riemann: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \text{ cv} \Leftrightarrow x < 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 1 \\ x > 1 \\ x = 1 \end{array} \right\}$$

$$Id = Mat_{P_H} + Mat_{P_{H^\perp}}$$

$$S_H(x) = P_H(x) - P_{H^\perp}(x)$$

$$Id_H = P_H(x) + P_{H^\perp}(x)$$

$$x \mapsto x = f(x)$$

CHAPITRE 2

$$d(v, H) = \|v - P_H(v)\|$$

$$x = Id(x)$$

$$\Rightarrow Mat x = Id_x$$

PTITE
FICHE

produit scalaire :

$$E^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$① \forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

$$② \forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

$$③ \forall (\lambda, x, x', y) \in \mathbb{R} \times E^3, \langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$$

$$④ \forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$⑤ \forall x \in E, \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$$

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ $\begin{cases} \text{dim finie} \Rightarrow \text{espace euclidien} \\ \text{dim infinie} \Rightarrow \text{espace préhilbertien} \end{cases}$

Cauchy-Schwartz : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien :

$$\forall (x, y) \in E^2,$$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

Norme : E un $\mathbb{K}$ -EV, $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto N(x)$

$$① N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$$

$$② \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$

$$③ \forall (x, y) \in E^2, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

inégalité
triangulaire

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien :

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ définit une norme euclidienne.}$$

Représentation matricielle : Soit $(e_i)_{i \in [1, n]}$ une base de E .

$$\Omega \in M_n(\mathbb{R}), \Omega_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n x_i e_i \\ y &= \sum_{j=1}^n y_j e_j \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \langle x, y \rangle = X^T \Omega Y \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$S_H(x) = P_H(x) - P_{H^\perp}(x)$$

Changement de base : Soit $B' = (e'_j)_{j \in [1, d]}$ ^{une autre,} base de E
 $\Omega'_{ij} = \langle e'_i, e'_j \rangle$

On note P la matrice de passage de B à B' ,
 $\Omega' = P^T \Omega P$

* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace préhilbertien et $(x, y) \in E^2$ x et y sont orthogonaux

* $[(x_i)_{i \in [1, n]}]$ orthogonale $\Leftrightarrow [\langle x_i, x_j \rangle = 0]$

* une famille orthogonale sans le vecteur nul est une famille libre

* thm de pythagore

* $(x_i)_{i \in [1, n]}$ une famille orthogonale $\Rightarrow \|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien $\Rightarrow E$ admet une base orthogonale.

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et F sev de E ,
 $F^\perp = \{x \in E \mid \langle x, f \rangle = 0 \ \forall f \in F\}$

E un EV et F sev de E , $E = F \oplus F^\perp$

$\forall x \in E, \exists! (y, z) \in F \times F^\perp \mid x = y + z$.

On note $y = p_F(x)$ projection orthogonale de x sur F .

$\forall x \in E, \|x - p_F(x)\| = \inf_z \|x - z\|$

E espace euclidien, F un sev de E , $(f_1, \dots, f_p)$ base orthogonale.

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \frac{\langle x, f_i \rangle}{\|f_i\|^2} f_i$$

E espace euclidien. $A \in E, B \in E, \quad A \in \Pi_{n,n}(\mathbb{R})$

① $A \subset B \Rightarrow A^\perp \supset B^\perp$

② $A^\perp = [\text{vect}(A)]^\perp$

③ $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

$\text{vect } A \cup B^\perp$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{Ker } A^\perp = \text{Im}(A^T) \\ \text{Im } A = \text{Ker}(A^T)^\perp \end{cases}$

$\Rightarrow \left[b \in \text{Im}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall y \in \text{Ker}(A^T) \\ \langle b, y \rangle = 0 \end{cases} \right]$

Chapitre 3

Notation : $B(I)$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions bornées sur I .
 CVS : convergence simple et CVU : convergence uniforme.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $B(I)$

$$* [(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CVS}] \Leftrightarrow [\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)]$$

$$* [(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CVU}] \Leftrightarrow [\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0]$$

$$* \text{CVS} \Leftrightarrow \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$* \text{CVU} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\text{CVU} \Rightarrow \text{CVS}$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVS vers f

$$\Rightarrow \begin{cases} \textcircled{1} f_n \text{ paire} \Rightarrow f \text{ paire } \forall n \in \mathbb{N} \\ \textcircled{2} f_n \text{ impaire} \Rightarrow f \text{ impaire } \forall n \in \mathbb{N} \\ \textcircled{3} f_n \text{ T-périodique} \Rightarrow f \text{ T-périodique } \forall n \in \mathbb{N} \\ \textcircled{4} f_n \text{ croissante} \Rightarrow f \text{ croissante } \forall n \in \mathbb{N} \\ \quad \text{— décroissante} \Rightarrow \text{— décroissante —} \\ \textcircled{5} f_n \geq 0 \Rightarrow f \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ ne fonctionne pas pour "borné", "continue", "dérivable"

$I \subset \mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonct^0 bornées sur I et continues sur I .

$$\Rightarrow [(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CVU vers } f \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(I)]$$

$\hookrightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s. f continues sur I , CVS vers f discontinue $\Rightarrow$ pas CVU.

I un intervalle bornée sur $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrales (= admettant intégrale sur I).

$$[(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CVU vers } f \text{ sur } I] \Rightarrow \forall (a, b) \in I^2, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

$$I = [a, b], (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1(I),$$

$$\left. \begin{array}{l} \exists x_0 \in I, (f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}} \text{ cv} \\ (f'_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CVU vers } g \in \mathcal{C}^0(I) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ CVU vers } \\ f \in \mathcal{C}^1(I) \\ \text{et } f' = g \end{array}$$

$$\hookrightarrow \text{pointuellement: } \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$$

$I \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fnc^0 définies sur I et bornées,
 [série de fnc^0 CVS vers f] $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in I, \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), n \in \mathbb{N} \text{ cv} \\ F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in I \end{array} \right.$

$\hookrightarrow$ en gros on étudie la cv de $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), n \in \mathbb{N}$ à x fixé
 $\Rightarrow$ retour chapitre 1.

$$\left. \begin{array}{l} \sum f_n, n \in \mathbb{N} \text{ CVU} \\ \text{vers } F: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} F_n: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x) \end{array} \text{ CVU vers } F.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |F(x) - F_n(x)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |R_n(x)| = 0$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fnc^0 définies et bornées sur I ,
 $\sum f_n, n \in \mathbb{N}$ converge normalement sur I
 $\Leftrightarrow \sum \sup_{x \in I} |f_n(x)|, n \in \mathbb{N} \text{ cv}$

$$\hookrightarrow \text{CVN} \Rightarrow \text{CVU} \Rightarrow \text{CVS}$$

$$\|x\|_{\infty} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (|x_i|)$$

CVU $\Rightarrow$ continuité (séries de fnc^0).

Normes : $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$,

on note $\| \cdot \|_E = N(\cdot)$

① $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \forall x \in E$

② $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \quad \forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}$

③ $N(x+y) \leq N(x) + N(y) \quad \forall (x, y) \in E^2$ (inégalité triangulaire)

$E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ $\forall p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue admet un inf et sup atteints.

Norme multiplicative $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, \|x \cdot y\|_E \leq \|x\|_E \cdot \|y\|_E$

$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, $\int_0^1 g(t) \cdot dt = 0 \Rightarrow \forall t \in [0, 1], g(t) = 0$

$E = \ell^2(\mathbb{N}) = \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 < +\infty \}$. Soit $u \in \ell^2(\mathbb{N})$,

$\| \cdot \|_1 : E \rightarrow \mathbb{R}^+$

$u \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ (norme sur E).

$(E, \| \cdot \|)$ un EVN et $(x_0, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$

boule ouverte : $B_E(x_0, r) = \{ x \in E \mid \|x - x_0\|_E < r \}$

boule fermée : $\overline{B}_E(x_0, r) = \{ x \in E \mid \|x - x_0\|_E \leq r \}$

sphère : $S_E(x_0, r) = \{ x \in E \mid \|x - x_0\|_E = r \}$

cv d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$:

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv dans $(E, \| \cdot \|_E) \Leftrightarrow \exists p \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - p\|_E = 0$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists p \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \\ n \geq N \Rightarrow \|u_n - p\|_E < \varepsilon \end{array} \right.$

continuité d'une fonction $f : (E, \| \cdot \|_E) \rightarrow (F, \| \cdot \|_F)$

$x \mapsto y = f(x)$

f continue en $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E,$

$\|x - x_0\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \\ x \in \overline{B}_E(x_0, \eta) \Rightarrow f(x) \in \overline{B}_F(f(x_0), \varepsilon) \end{array} \right.$

toute norme définie sur un EVN $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est une application continue sur $(E, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$

dans $(E, \|\cdot\|)$, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ (deuxième inégalité triangulaire)

EVN muni de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$,

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ équivalentes $\Leftrightarrow \exists (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \forall x \in E, a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$

$\hookrightarrow$ dans $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_p$ équivalentes $\forall (n,p) \in \mathbb{N}$

$\hookrightarrow$ dans un EV de dim finie, toutes les normes sont équivalentes

$\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_x$ équivalentes $\Rightarrow$ ttes suites cv dans $(E, \|\cdot\|)$ cv aussi dans $(E, \|\cdot\|_x)$

$\underbrace{(E, \|\cdot\|_E) \text{ et } (F, \|\cdot\|_F)}_{2 \text{ EVN.}} \quad \mathcal{L}(E, F) = \{u : E \rightarrow F \text{ linéaire}\} = \{u \in \mathcal{L}(E, F), u \text{ continue de } E \rightarrow F\}$

$f \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f \in \mathcal{C}^0((E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)) \\ \Leftrightarrow f \in \mathcal{C}^0 \text{ en } 0_E \text{ pour } \|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F \\ \Leftrightarrow f \text{ bornée sur } \overline{B_E(0,1)} \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \overline{B_E(0,1)}, \|f(x)\|_F \leq M \\ \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \cdot \|x\|_E \\ \Leftrightarrow f \text{ est lipschitzienne} \Leftrightarrow \exists k > 0, \forall (x,y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E \end{cases}$$

$\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{C}^0(E, F)$

$f \in \mathcal{L}_c(E, F), \|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|f(x)\|_F$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|f(x)\|_F = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

$\uparrow$ norme subordonnée.

$\hookrightarrow f \in \mathcal{L}_c(E, F) \Rightarrow \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq \|f\| \cdot \|x\|_E$

$\hookrightarrow f \in \mathcal{L}_c(E, F) \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \cdot \|x\|_E$

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t) \cdot dt \leftarrow \text{ça démontre Taylor.}$$

PTITE
FICHE

CHAPITRE 4 / 2

$$E, F, G : 3 \text{ EVN, } f \in \mathcal{L}_c(E, F), g \in \mathcal{L}_c(F, G), \\ g \circ f(E, G) \text{ et } \|g \circ f\|_{\mathcal{L}_c(E, G)} \leq \|g\|_{\mathcal{L}_c(F, G)} \times \|f\|_{\mathcal{L}_c(E, F)}$$

$$\sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ cv et a pour limite } u \in E \\ \Leftrightarrow u_N \text{ cv vers } u, u_N = \sum_{k=0}^N u_k, \exists U \in E, \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \|u - u_N\|_E = 0$$

$$\sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ cv} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|_E = 0$$

Soit E , $\dim E = p \xrightarrow{p \in \mathbb{R}} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_{n1}, \dots, u_{np})$
 $\sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ cv} \Leftrightarrow \forall i \in [1, p], \sum u_{ni}, n \in \mathbb{N} \text{ cv}$

$$\sum u_n, n \in \mathbb{N} \text{ cvN} \Leftrightarrow \sum \|u_n\|_E, n \in \mathbb{N} \text{ cv} \\ \hookrightarrow E \text{ dim finie} \Rightarrow [\text{cvN} \Rightarrow \text{cv}]$$

NORMES

Sur $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Sur $M_n(\mathbb{K})$:

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p}$$

PETITES
FICHES

CHAPITRE 5 / 1

Rappel polynôme

$$P(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k \quad \text{avec } (a_i)_{i \in \{0, \dots, d\}} \in K^d$$

coefficient du polynôme

$$(P+Q)(x) = \sum_{k=0}^{\max(e,d)} (a_k + b_k) x^k \quad \text{avec } Q(x) = \sum_{k=0}^e b_k x^k$$

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q).$$

$P \in K[x]$, $\lambda \in R$ racine de P d'ordre $r \leftarrow$ multiplicité de la racine.
 $\Leftrightarrow \exists Q \in K[x], P = (x-\lambda)^r \cdot Q$ et $Q(\lambda) \neq 0$.

$$\lambda \text{ multiplicité } r \Leftrightarrow \begin{cases} P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(r-1)}(\lambda) = 0 \\ \text{ET } P^{(r)}(\lambda) \neq 0 \end{cases}$$

Formule de Leibniz: f, g infiniment dérivable en a
 alors $f \times g$ infiniment dérivable en a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

$P \in K[x]$, P scindé dans K de degrés d ($d = \deg(P)$)

$$\begin{cases} \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in K^d, \text{ (pas forcément distinctes).} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \exists c \in K \setminus \{0\} \\ P(x) = c \cdot \prod_{i=1}^d (x - \lambda_i) \end{cases} \end{cases}$$

Théorème d'Alémbert-Gauss: $\forall P \in \mathbb{C}[x]$, P scindé dans $\mathbb{C}$
 $\hookrightarrow$ pas forcément dans $\mathbb{R}$.

E EV
 $u \in \mathcal{L}(E)$
 $F \subseteq E$
 $\hookrightarrow \text{SEV de } E$

F stable par $u \Leftrightarrow u(F) \subseteq F$.

$(u, v) \in \mathcal{L}^2(E)$ et commutable (càd $vu = uv$)
 $\Rightarrow \ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .

F SEV de E et B base de E dont les premiers vecteurs forment une base de F .

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F \text{ stable par } u \\ \Leftrightarrow \text{la représentation matricielle de } u \\ \text{dans } B \text{ vérifie : } \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ A = \text{Mat}(u, B) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array} \right] \xrightarrow{F} \end{array} \end{array} \right.$$

$\hookrightarrow G \subseteq E, E = F \oplus G$ et G stable par u :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right] \xleftrightarrow{G}$$

$\xleftrightarrow{u(F)} \quad \xleftrightarrow{u(G)}$

$u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in K$ valeur propre de u

$$\Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, u(x) = \lambda x$$

on note $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ l'ensemble des valeurs propres associées à $\lambda \in K$ (espace propre de λ)

$\hookrightarrow$ matricielle : A rep. matricielle de u .

$$A \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \exists X \in K^n \setminus \{0\}, A \cdot X = \lambda \cdot X$$

① $\lambda \in \text{Spec}(u) \Rightarrow E_\lambda$ stable par u .

② $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ vp de u distinctes

$\Rightarrow \forall (x_i)_{i \in [1, r]} \in E_{\lambda_i}$, la famille $(x_i)_{i \in [1, r]}$ est libre.

$\Rightarrow$ les espaces propres sont en somme directe.

③ $\dim E = d$ et $u \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow u$ admet maximum d vp distinctes.

Matrice de Vandermonde

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}$$

inversible $\Leftrightarrow \forall i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$

CHAPITRE 5 / 2

$A = \text{Mat}(u, B) \Rightarrow$ on parle de polynôme ^{caractéristique} associé à u
 $\hookrightarrow B = \text{Mat}(u, B')$ donc $P_A(x) = P_{B'}(x)$ car $\equiv$ à $P_u(x)$

- * F sous espace stable de E par A .
 A_F la matrice de la restriction de A à F .

$$A = \begin{bmatrix} A_F \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \updownarrow F \\ \leftarrow F \end{matrix} \quad P_{A_F} \text{ divide } P_A$$

repräsentat^o matrixielle:

A 3x3 grid of circles. The top-left, middle, and bottom-right squares contain dots or arrows, while the other squares are empty.

- u a dvp distinctes $\Rightarrow$ $\begin{cases} u \text{ diagonalisable} \\ p_u(X) = \prod_{i=1}^d (x - \lambda_i) \\ \dim E_{\lambda_i} = m_{\lambda_i} = 1 \end{cases}$

$\text{Ker } M \subset \text{Ker } M^2 \subset \text{Ker } M^3 \dots$ et $\text{Ker } M^k$ est stable par M .

$u \in \mathcal{L}(E)$ (resp A dans $M_d(K)$) trigonalisable.
 $\Leftrightarrow p_u$ (ou p_A) scindé dans K .

$\forall A \in M_d(K), A$ trigonalisable

$P \in K[x], a_i \in K \forall i \in [0, n]$.

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

On note $(P(u) = a_n u^n + \dots + a_1 u + a_0) \in \mathcal{L}(E)$
endomorphisme de E .

$$* (P+Q)(u) = P(u) + Q(u)$$

$$* (P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$$

$u \in \mathcal{L}(E)$ (ou $A \in M_d(K)$) et $P \in K[x]$

P est annulateur de u (resp. A)

$$\Leftrightarrow P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad (\text{ou } P(A) = 0_{M_d(K)})$$

P polynôme annulateur $\Rightarrow P \times Q$ annulateur $\forall Q \in K[x]$

* Matrice semblables $\Rightarrow$ même polynôme annulateur

* P polynôme annulateur de $u \Rightarrow$ vp de u sont racine de P .

Thm de Cayley-Hamilton: $u \in \mathcal{L} \Rightarrow p_u$ est annulateur
 $\Rightarrow$ l'ensemble des polynômes annulateurs de u n'est jamais restreint au polynôme nul.

$u \in \mathcal{L}(E), \exists!$ polynôme unitaire de l'ensemble des polynômes annulateurs de u tel que:

$\forall P \in K[x] \quad P(u) = 0 \Rightarrow \overset{\text{polynôme minimale}}{\pi_u} \text{ divise } P$

$\hookrightarrow$ l'ensemble des polynômes annulateurs sont des multiples de π_u .

$u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[x]$ scindé dans $\mathbb{K}$.

$$P(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j$$

$$\Rightarrow \text{Ker } P(u) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker } [(u - \lambda_i \text{Id})^{m_i}]$$

Lemme
des
rayaux

A diagonalisable $\Leftrightarrow \pi_u$ scindé à racine simple.

E_λ stable par $A \quad \forall \lambda \in \text{Sp}(A)$

Décomposition de Jordan-Cherallay (ou Darford-Schwarz)

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$

$\exists ! (D, N)$ avec D diagonalisable, N nilpotente,

$A = D + N$ et $DN = ND$.

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente
 $\Leftrightarrow \exists R \in \mathcal{M}_n, M^R = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

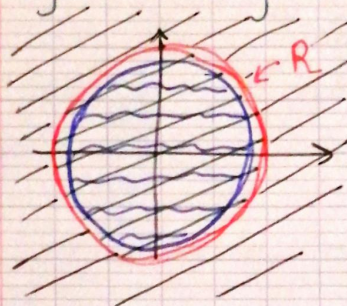
CHAPITRE 6

série entière : $\sum a_n z^n, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$

↳ domaine de convergence : $\{z \in \mathbb{C} \mid \sum a_n z^n \text{ cv}\} = D_{\text{cv}}$

Lemme d'Abel : $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ borné $\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}, |z| < |z_0|, \sum a_n z^n \text{ cv}$
 ↳ $a_n z_0^n$ borné, m chose par $a_n |z_0|^n$

Rayon de convergence : $R = \sup \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ borné}\}$



CVS

CVN

R (on sait pas)

DV

d'Alembert : (convention)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \begin{cases} \rightarrow +\infty \Rightarrow R=0 \\ \rightarrow 0 \Rightarrow R=+\infty \\ \text{autres : on sait pas} \end{cases}$

Cauchy : (convention).
pareil

d'Alembert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda \Rightarrow R = \frac{1}{\lambda}$$

Cauchy :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \lambda \Rightarrow R = \frac{1}{\lambda}$$

continuité

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, x \in \mathbb{R} \Rightarrow S \in \mathcal{C}^0]-R; R[$$

$$S(R) \text{ cv} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow R^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n \rightsquigarrow \text{résultat symétrique en } -R.$$

intégrabilité

$$\sum a_n x^n, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, [a, b] \subset]-R; R[,$$

$$\int_a^b \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx$$

dérivabilité

$$S :]-R; R[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\hookrightarrow S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

une SE est infiniment dérivable sur $]-R; R[$.

est dérivable et sa dérivée est une SE de rayon de convergence R aussi !

DANS R !!!

Somabilité :

$\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de cv R_a et R_b :

$\Rightarrow \sum (a_n + b_n) z^n, n \in \mathbb{N}$ est une SE de rayon de cv $R \geq \min(R_a, R_b)$
 $\hookrightarrow \text{si } R_a = R_b$

Produit : $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de cv R_a et R_b

$$\Rightarrow \begin{cases} c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \end{cases}$$

$\left(\sum c_n z^n, n \in \mathbb{N} \right)$ est une SE de rayon de cv $R_c \geq \min(R_a, R_b)$

Développement en SE de fct^o :

$\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de cv R_a et $R_b \geq r > 0$.

$$\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| < r \right] \Rightarrow a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Notation : DSE $\Leftrightarrow$ Développement en série entière.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet un DSE en 0

$$\Leftrightarrow \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ et } R > 0 \mid f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \forall x \in]-R; R[.$$

$$\hookrightarrow \text{aussi en } x_0 : f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \forall x \in]x_0 - R; x_0 + R[.$$

Ptite FICHE

CHAPITRE 7 $\rightarrow$ on se place dans un $\mathbb{R}$ -EV
avec un produit scalaire.
 $\Rightarrow$ DFM : INEE.

espace euclidien

ISOMETRIES : $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$u \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie $\Leftrightarrow \|u(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$
où $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

- ① une isométrie est inversible (car $\ker u = \{0\}$)
- ② $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
- ③ les seules valeurs propres réelles sont 1 et -1
- ④ la composée de deux isométries est une isométrie.
- ⑤ F stable par isométrie $\Rightarrow F^\perp$ stable.

$S \in M_d(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale $\Leftrightarrow \begin{cases} S^T \cdot S = S \cdot S^T = \mathbb{I}_{d, \mathbb{R}} \\ S^{-1} = S^T \end{cases}$

notation : $O_d(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales.

dans $\mathbb{R}^d, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i = x^T \cdot y$

$A \in M_d(\mathbb{R}), \langle x, Ay \rangle = x^T (Ay) = (x^T A) y = (A^T x)^T y = \langle A^T x, y \rangle$

$S \in M_d(\mathbb{R})$ est orthogonale

$\Rightarrow$ ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ par le produit scalaire canonique.

- $S_i^T S_j = \langle S_i; S_j \rangle \leftarrow$ produit scalaire de $\mathbb{R}^d$
- $S_i^T S_j = 1$ si $i = j$
= 0 sinon

$S \in M_d(\mathbb{R})$ orthogonale $\Rightarrow \det S = \pm 1$

orthogonale

$u \in \mathcal{L}(E)$, alors u est une isométrie

$\Leftrightarrow$ la représentation de u dans une base orthonormée est une matrice $\perp$.

$B = (e_i)_{i \in [1, d]}$ et $B' = (e'_i)_{i \in [1, d]}$ des bases orthonormées de E .
 $\Rightarrow P_{BB'}$ est orthogonale.

$u \in \mathcal{L}(E)$. u symétrique $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

on note $\mathcal{S}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ le SEV de $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes symétriques.

$u \in \mathcal{S}(E)$ et A sa représentation dans une base orthonormée de E .
 $A = A^T$

— $u \in \mathcal{S}(E)$ maintenant — A est la représentat^o de u dans une base orthonormée.

① $\text{Im } u = \text{Ker}(u)^\perp$

② F stable par $u \Rightarrow \begin{cases} u|_F \text{ symétrique} \\ F^\perp \text{ stable par } u \end{cases}$

ttes valeurs propres de A sont réelles.

Soit (λ_1, v_1) et (λ_2, v_2) des couples (valeur propre, vecteur propre) tq $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
 $\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$ càd E_{λ_1} et E_{λ_2} orthogonaux deux à deux.

Thm spectrale: $u \in \mathcal{S}(E)$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

$\hookrightarrow A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists D$ (diagonale) et $\exists O$ (orthogonale) tq:

$$A = O D O^T$$

$u \in \mathcal{S}(E)$. u est défini positif $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \in \mathbb{R}^+ \\ \langle u(x), x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ défini positive $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^d, x^T A x \geq 0 \\ x^T A x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$

$u \in \mathcal{S}(E)$ est défini positif $\Leftrightarrow \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ (i.e. valeurs propres strictement positives)

$u \in \mathcal{S}(E)$ défini positif $\Rightarrow \langle x, y \rangle_u = \langle u(x), y \rangle_E$ définit un nouveau produit scalaire sur E .

PTITE FICHE

CHAPITRE 7/2

On note $\mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

décomposition de Cholesky : triangulaire inférieure.
Soit $A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$, $\exists ! L$ inversible si on fixe le signe de ses éléments diagonaux tq $A = L \cdot L^T$.

$$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists 2 \text{ matrices } U, V \text{ s.t. } U \in O_m(\mathbb{R}), V \in O_n(\mathbb{R}) \\ \text{et } A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_r & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} V^T \\ \sigma_1, \dots, \sigma_r > 0 \text{ et } r \leq \min(m, n) \\ \text{Les } \sigma_i \text{ sont les valeurs singulières de } A. \end{array} \right.$$

(lignes, colonnes)

$$r = \text{rang}(A) = \dim(\text{vect}(\text{vecteurs colonnes}))$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{nilpotent c'ad } \exists R \in \mathbb{N}, A^R = 0$$

↳ les vaps sont = 0

⇒ nilpotent + symétrique ⇒ matrice nul.

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow 0 \text{ n'est pas valeur propre}$$

$$\Leftrightarrow 0 \notin \text{Sp}(A)$$

$$\Leftrightarrow \text{car } 0 \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \det A = 0$$

CHAPITRE 8 / 1

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ } 2 suites réelles ou complexes. $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ avec $u_n = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$
↳ série trigonométrique

$$\left. \begin{aligned} \cos(nt) &= \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} & n \geq 0 \\ \sin(nt) &= \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} & n \geq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_n(t) = \underbrace{\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)}_{C_n} e^{int} + \underbrace{\left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)}_{C_{-n-1}} e^{-int}$$

$$\Rightarrow C_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} C_n e^{int} + C_{-n} e^{-int}, n \neq 0$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathbb{R}$

$\left. \begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \end{aligned} \right\} \text{CVA} \Rightarrow u_n \text{ CVN} \Rightarrow u_n \text{ CVU} \Rightarrow u_n \text{ CVS} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathcal{C}^0$
 $\Rightarrow \sum u_n$ intégrable sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$\left. \begin{aligned} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned} \right\} \text{vers } 0 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ CVU } \forall \text{ intervalle } [2k\pi + \alpha; 2k\pi - \alpha] \forall \alpha \in]0, \pi[$
 $\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\})$

$\left. \begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n &\text{ CVS en } t_0 \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} u'_n &\text{ CVU sur } [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ CVU sur } [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon] \Rightarrow \text{dérivable !!}$

$\left. \begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} na_n \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} nb_n \end{aligned} \right\} \text{CVA} \Rightarrow \text{CVU}(\mathbb{R}) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

$\left. \begin{aligned} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned} \right\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cdot \exists t_0 \in]0, 2\pi[\mid \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ CV} \\ \cdot (na_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (nb_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ vers } 0$
 $\Rightarrow S: [\alpha; 2\pi - \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable.
 $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$

f continue par morceaux $\Leftrightarrow \exists a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} = b$
telle que $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$ est $\in \mathcal{C}^0$ et admet limite à droite et à gauche de a_{i+1} $\forall i \in [0, n-1]$.

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i 2\pi n t / T} dt$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ et 2π -périodique et continue par morceaux
coeff. de Fourier: $\forall n \in \mathbb{Z}: c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i n t} dt$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

$$\sum c_n(f) e^{i n x}, n \in \mathbb{Z}$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n)$$

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx), n \in \mathbb{N}.$$

si 2π périodique
et $\mathcal{C}^0$ par morceaux

(i) on peut intégrer sur n'importe quel segment de 2π .

(ii) f paire $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, b_n(f) = 0$

f impaire $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$

(iii) f à valeur réelle $\Rightarrow c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$ (on utilise $(a_n), (b_n)$)

(iv) $\sum a_n$ et $\sum b_n$ CVA $\Rightarrow f \in \mathcal{C}^0$ et $a_n(f) = a_n$

$D = \{f \text{ continue par morceaux sur } \mathbb{R}, 2\pi\text{-périodique}\}$

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x+h)$$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad (\text{produit scalaire hermitien})$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, e_n(t) = e^{i n t}$$

(i) $\forall n \in \mathbb{Z}, e_n$ continue et 2π périodique

(ii) $\forall p \in D, c_n(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i n t} dt = \langle f, e_n \rangle$

(iii) $\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i n t} e^{-i m t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$

$P_n = \text{vect}\{(e_k), k \in [-n, n]\} \leftarrow$ ensemble polynôme de deg $\leq n$.

$\Rightarrow D = P_n \oplus P_n^\perp \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$ $\forall p \in D, \exists! p_n(p), p = p_n(p) + p - p_n(p)$

$\langle p - p_n(p), p_n(p) \rangle = 0$ (p_n est la projection $\perp$ de p sur P_n)

$$p_n(p) = \sum_{k=-n}^n \langle p, e_k \rangle e_k \quad p_n(p)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(p) e^{i k x}$$

$$\inf_{g \in P_n} \|f - g\|^2 = \|f\|^2 - \|p_n(f)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^n |c_k(p)|^2$$

Parseval:

Inégalité de Parseval: $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=-n}^n |C_k(p)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p(t)|^2 dt$
 Egalité de Parseval: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k(p)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p(t)|^2 dt$
 $\forall p \in D, \sum_{k \in \mathbb{Z}} |C_k(p)|^2 < \infty$

$(p_n(p))_{n \in \mathbb{N}}$ cv en norme quadratique vers f

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - p_n(p)(t)|^2 dt = 0$$

Théorème de Dirichlet:

Soit f 2π -périodique
 $f \in C^1$ par morceaux } $\Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k(p) e^{ikx}$ cvs sur $\mathbb{R}$.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k(p) e^{ikx} = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-))$$

$$f(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x+h)$$

$$f(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} f(x+h)$$

app linéaire:

- $f(u+v) = f(u) + f(v)$
- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$
- $f(0) = 0$