

Démos signal

Marie-Line Da Costa Bento et Baptiste Rébillard

7 juin 2023

Table des matières

1	Transformée de Fourier	2
1.1	Généralités, définitions et propriétés	2
1.1.1	Proposition 8.9	2
1.1.2	Proposition 8.10	2
1.1.3	Proposition 8.11	3
1.1.4	Proposition 8.12	3
1.1.5	Proposition 8.13	4
1.1.6	Proposition 8.14	4
1.1.7	Proposition 8.15 - Théorème du retard (décalage temporel)	5
1.1.8	Proposition 8.16 - Décalage en fréquence	5
1.1.9	Signal porte (créneau)	5
1.1.10	Signal triangulaire	6
1.1.11	Signal gaussien	6
1.2	Dérivation	8
1.2.1	Proposition 8.20	8
1.2.2	Proposition 8.24	8
1.2.3	Proposition 8.28	9
1.3	Impulsion de Dirac	10
1.3.1	Proposition 8.29	10

Chapitre 1

Transformée de Fourier

1.1 Généralités, définitions et propriétés

1.1.1 Proposition 8.9

Enoncé Soit $s \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, la transformée de Fourier de s est une fonction continue et bornée et on a :

$$\forall f \in \mathbb{R}, |F[s](f)| \leq \|s\|_1$$

De plus, $F[s](f)$ a pour limite 0 quand f tend vers $\pm\infty$ (admis)

Preuve $\forall f \in \mathbb{R}, |\hat{s}(f)| = \left| \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2i\pi f t} dt \right|$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |s(t) e^{-2i\pi f t}| dt = \|s\|_1$$

1.1.2 Proposition 8.10

Enoncé Soit $s \in L^1(\mathbb{R})$, notons s_- la fonction $t \mapsto s(-t)$, alors :

$$\forall f \in \mathbb{R}, F[s_-](f) = F[s](-f)$$

Preuve $\forall f \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} F[s_-](f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(-t) e^{-2i\pi f t} dt \text{ on pose : } \tau = -t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{2i\pi f t} d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(\tau) e^{2i\pi f t} d\tau \\ &= F[s](-f) \end{aligned}$$

1.1.3 Proposition 8.11

Enoncé Soit $s \in L^1(\mathbb{R})$, alors :
 $\forall f \in \mathbb{R}, F[\bar{s}](f) = \overline{F[s](-f)}$

Preuve $\forall f \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F[\bar{s}](f) &= \int_{\mathbb{R}} \bar{s}(t) e^{-2i\pi ft} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{s(t) e^{2i\pi ft}} dt \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}} s(t) e^{2i\pi ft} dt} \\ &= \overline{s(-f)} \end{aligned}$$

1.1.4 Proposition 8.12

Enoncé Soit $s \in L^1(\mathbb{R})$. Si s est une fonction paire, alors :

$$\forall f \in \mathbb{R}, F[s](f) = 2 \int_0^{+\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt$$

Si s est une fonction impaire, alors :

$$\forall f \in \mathbb{R}, F[s](f) = -2i \int_0^{+\infty} s(t) \sin(2\pi ft) dt$$

Preuve paire $\forall f \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F[s](f) &= \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2i\pi ft} dt \\ &= \int_0^{+\infty} s(t) e^{-2i\pi ft} dt + \int_{-\infty}^0 s(t) e^{-2i\pi ft} dt \text{ On pose } \boxed{t = -\tau \implies dt = -d\tau} \\ &= \int_0^{+\infty} s(t) e^{-2i\pi ft} dt + \int_0^{+\infty} \underbrace{s(-\tau)}_{=s(\tau) \text{ car } s \text{ paire}} e^{2i\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} s(t) [e^{-2i\pi ft} + e^{2i\pi ft}] dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} s(t) \cos(2\pi ft) dt \text{ d'après la formule d'Euler} \end{aligned}$$

Preuve impaire $\forall f \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F[s](f) &= \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2\pi f t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} s(t) e^{-2i\pi f t} dt + \int_{-\infty}^0 s(t) e^{-2i\pi f t} dt \text{ On pose } \boxed{t = -\tau \implies dt = -d\tau} \\
&= \int_0^{+\infty} s(t) e^{-2i\pi f t} dt + \int_0^{+\infty} \underbrace{s(-\tau)}_{=-s(\tau) \text{ car } s \text{ impaire}} e^{2i\pi f \tau} d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} s(t) e^{-2i\pi f t} dt - \int_0^{+\infty} s(\tau) 2i\pi f \tau d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} s(t) [e^{-2i\pi f t} - e^{2i\pi f t}] dt \\
&= -2i \int_0^{+\infty} s(t) \sin(2\pi f t) dt \text{ d'après la formule d'Euler}
\end{aligned}$$

1.1.5 Proposition 8.13

Enoncé Soit $s \in L^1(\mathbb{R})$, un signal à valeurs réelles, alors :
 $|F[s]|$ est paire et $Arg(F[s])$ est impaire

Preuve On a $\forall f \in \mathbb{R}, F[\bar{s}](f) = \overline{F[s](-f)}$ et $\hat{s}(f) = |\hat{s}(f)| e^{i Arg(\hat{s}(f))}$

$$\implies \forall f \in \mathbb{R}, |F[\bar{s}](f)| = |\overline{F[s](-f)}|$$

Soit, $\forall f \in \mathbb{R}, |F[s](f)| = |F[\bar{s}](f)|$ car s à valeurs réelles

Donc $f \mapsto |\hat{s}(f)|$ est bien paire $F[s](-f) = |F[s](-f)| e^{i Arg(F[s](-f))}$

$$\begin{aligned}
&= |F[s](-f)| e^{i Arg(\overline{F[s](f)})} \\
&= |F[s](-f)| e^{-i Arg(F[s](f))}
\end{aligned}$$

d'où $Arg(F[s](-f)) = -Arg(F[s](f))$

donc $f \mapsto Arg(\hat{s}(f))$ impaire

1.1.6 Proposition 8.14

Enoncé Soit $s \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$, alors, en notant H_a l'application $t \rightarrow at$ (homothétie de vecteur a), on a :

$$\forall f \in \mathbb{R}, F[s \circ H_a](f) = \frac{1}{|a|} F[s]\left(\frac{f}{a}\right)$$

Preuve On démontre dans la cas $a < 0$ mais c'est la même chose dans le cas $a > 0$.

$$s \in L^1(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}_+^* \forall f \in \mathbb{R}, F[s(at)](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(at) e^{-2i\pi f t} dt$$

Posons $\tau = at$ et $d\tau = a dt$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} s(\tau) e^{-2i\pi f \frac{\tau}{a}} d\tau \\ &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} s(\tau) e^{-2i\pi \tau \frac{f}{a}} d\tau \\ &= \frac{1}{a} F[s]\left(\frac{f}{a}\right) \end{aligned}$$

1.1.7 Proposition 8.15 - Théorème du retard (décalage temporel)

Enoncé Soit $s \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$, alors, en notant U_a l'application $t \rightarrow t - a$ (translation de vecteur a), on a :
 $\forall f \in \mathbb{R}, F[s \circ U_a](f) = e^{-2i\pi f a} F[s](f)$

Preuve $s \in L^1(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}$, on pose $\tau = t - a$ et $d\tau = dt$
 $\forall f \in \mathbb{R}, F[s(t - a)](f) = e^{-2i\pi f a} F[s](f)$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} s(t - a) e^{-2i\pi f t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} s(\tau) e^{-2i\pi f (\tau + a)} d\tau \\ &= e^{-2i\pi f a} \int_{\mathbb{R}} s(\tau) e^{-2i\pi f \tau} d\tau \\ &= e^{-2i\pi f a} \hat{s}(f) \end{aligned}$$

1.1.8 Proposition 8.16 - Décalage en fréquence

Enoncé Soit $s \in L^1(\mathbb{R})$ et $f_0 \in \mathbb{R}$, alors, en notant $e^{2\pi f_0 t}$ la fonction $t \rightarrow e^{2\pi f_0 t}$, on a :
 $\forall f \in \mathbb{R}, F[e^{2\pi f_0 t} s](f) = F[s](f - f_0)$

Preuve $\forall f \in \mathbb{R}, F[e^{2\pi f_0 t} s](f) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{2i\pi f_0 t} e^{-2i\pi f t} dt$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2i\pi (f - f_0) t} dt \\ &= F[s](f - f_0) \end{aligned}$$

1.1.9 Signal porte (créneau)

Enoncé Soit $c > 0$ et $T > 0$.

Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Pi(t) = a \forall t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$, $\Pi(t) = 0$ sinon.

Π est une fonction paire.

$$\forall f \in \mathbb{R}, F[\Pi](f) = aT \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = aT \operatorname{sinc}(fT)$$

Preuve $\int_{\mathbb{R}} |\Pi(t)| dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\Pi| dt = aT < +\infty$ donc $\Pi \in L^1(\mathbb{R})$

$$\text{Soit } f \in \mathbb{R}, \hat{\Pi}(f) = \int_{\mathbb{R}} \Pi(t) e^{-2i\pi ft} dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a e^{-2i\pi ft} dt \\ &= a \left[\frac{e^{-2i\pi ft}}{-2i\pi f} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{a}{2i\pi f} (e^{i\pi fT} - e^{-i\pi fT}) \\ &= \frac{a}{\pi f} \sin(\pi fT) \\ &= aT \operatorname{sinc}(fT) \end{aligned}$$

1.1.10 Signal triangulaire

Enoncé Soit $a > 0$ et $T > 0$.

Soit σ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\sigma(t) = (1 - 2\frac{|t|}{T})\Pi(t)$.

σ est une fonction paire.

$$\forall f \in \mathbb{R}, F[\sigma](f) = \frac{aT}{2} (\operatorname{sinc}(\frac{fT}{2}))^2$$

Preuve Comme σ est une fonction paire :

$\forall f \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(f) &= 2 \int_0^{+\infty} \sigma(t) \cos(2\pi ft) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{T}{2}} (1 - 2\frac{|t|}{T}) \cos(2\pi ft) dt \\ (\text{Par IPP}) &= \frac{4a}{T} \frac{1 - \cos(\pi fT)}{4\pi^2 f^2} \\ &= \frac{a}{T} \frac{2(\sin(\frac{\pi fT}{2}))^2}{\pi^2 f^2} \\ &= \frac{aT}{2} \left(\frac{\sin(\frac{\pi fT}{2})}{\pi f \frac{T}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{aT}{2} (\operatorname{sinc}(f \frac{T}{2}))^2 \end{aligned}$$

1.1.11 Signal gaussien

Enoncé Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $s(t) = e^{-t^2}$ pour t réel.

Alors $s \in L^1(\mathbb{R})$, s est appelé signal gaussien.

La fonction s est paire.

$$\forall f \in \mathbb{R}, F[s](f) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2}$$

Preuve

1. $\forall t \in \mathbb{R}, s(-t) = e^{-(-t)^2} = e^{-t^2} = s(t) \implies s$ paire
2. $\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ d'après l'intégrale de Gauss
Or $\sqrt{\pi} \in \mathbb{R} \implies s \in L^1(\mathbb{R})$
3. $s'(x) = -2xs(x) \implies s'(x) - 2xs(x) = 0$
Faisons la transformé de Fourier de cette équation,
 $\forall f \in \mathbb{R},$

$$F[s' - 2xs](f) = F[0](f) \iff F[s'](f) - 2xF[s](f) = 0$$

$$\text{or } \begin{cases} F[s'](f) = 2i\pi f F[s](f) \\ F[xs](f) = \frac{-1}{2i\pi} F[s'](f) \text{ car } F[s]^{(p)}(f) = (-2i\pi)^p F[x^p s](f) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2F[s'](f) - 2xF[s](f) = 0 &\iff 2i\pi f F[s](f) - 2\frac{(-1)}{2i\pi} F[s'](f) = 0 \\ &\implies 2i\pi f F[s](f) + \frac{1}{i\pi} F[s'](f) = 0 \\ &\implies \frac{-\frac{1}{i\pi} F[s'](f)}{2i\pi f F[s](f)} = 1 \\ &\implies \frac{F[s'](f)}{2\pi^2 f F[s](f)} = -1 \\ &\implies \frac{F[s'](f)}{F[s](f)} = -2\pi^2 f \\ &\implies \frac{F[s'](f)}{F[s](f)} = -2\pi^2 f \\ &\implies \ln |F[s](f)| = -2\pi^2 \times \frac{f^2}{2} + C \in \mathbb{R} \\ &\implies F[s](f) = e^{-\pi^2 f^2} \times K \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Calculons K ,

$$\begin{aligned} K = F[s](0) &= \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2i\pi t \times 0} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \\ &= \sqrt{\pi} \text{ d'après l'intégrale de Gauss} \end{aligned}$$

$$\implies F[s](f) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2}$$

1.2 Dérivation

1.2.1 Proposition 8.20

Enoncé Soit une fonction $s \in L^1(\mathbb{R})$ dérivable, telle que, pour tout p entier, l'application $(.)^p s : t \rightarrow t^p s(t)$ soit aussi dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $F[s]$ est dérivable et ses dérivées sont données par :

$$F[s]^p(f) = (-2i\pi)^p F[(.)^p s](f)$$

Preuve $\forall f, F[s](f) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2i\pi f t} dt$ intégrale à paramètre de f .
Soit $[c, d] \subset \mathbb{R}$,

- $(t, f) \mapsto s(t) e^{-2i\pi f t}$ différentiable donc continue sur $\mathbb{R} \times [c, d]$
- $\forall (t, f) \in \mathbb{R} \times [c, d]$,

$$|s(t) e^{-2i\pi f t}| \leq |s(t)|$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de f .

- $\frac{\partial \phi}{\partial f}(t, f) = (-2i\pi t) s(t) e^{-2i\pi f t}$
 $\frac{\partial \phi}{\partial f}(t, f)$ continue sur $\mathbb{R} \times [c, d]$
- $\forall (t, f) \in \mathbb{R} \times [c, d]$,
 $|\frac{\partial \phi}{\partial f}(t, f)| = |(-2i\pi t) s(t) e^{-2i\pi f t}| \leq 2\pi |t s(t)|$
Or $t \mapsto t s(t) \in L^1(\mathbb{R})$ par hypothèse.

$\implies$ Donc $F[s]$ est dérivable sur $[c, d]$,
 $\forall c < d$ et $\forall f, F[s]'(f) = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi t) s(t) e^{-2i\pi f t} dt = -2i\pi F[ts](f)$

1.2.2 Proposition 8.24

Enoncé u et v dans $L^1(\mathbb{R}) \implies \begin{cases} u * v \in L^1(\mathbb{R}) \\ \|u * v\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1 \end{cases}$

Preuve $\|u * v\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |u * v(a)| da$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(a-t) v(t)| dt da \text{ car } u * v \in L^1(\mathbb{R}) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u(a-t) v(t)| da dt \text{ Théorème de Fubini} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |v(t)| \left(\int_{\mathbb{R}} |u(a-t)| da \right) dt \end{aligned}$$

Or, en posant $b=a-t$,
 $\int_{\mathbb{R}} |u(a-t)| da = \int_{\mathbb{R}} |u(b)| db = \|u\|_1$
Donc $\|u * v\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1$

1.2.3 Proposition 8.28

Enoncé Soit u et $v \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$F[u * v] = F[u] F[v]$$

Si, de plus, $uv \in L^1(\mathbb{R})$ et $F[u]$ ou $F[v]$ aussi, alors

$$F[uv] = F[u] * F[v]$$

Preuve 1 $\forall f \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F[u * v] &= \int_{\mathbb{R}} (u * v)(t) e^{-2i\pi ft} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t-a) v(a) e^{-2i\pi ft} da dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(t-a) v(a) e^{-2i\pi ft} dt da \text{ d'après Fubini} \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(a) \int_{\mathbb{R}} u(t-a) e^{-2i\pi ft} dt da \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(a) \int_{\mathbb{R}} u(\tau) e^{-2i\pi f(\tau+a)} d\tau da \text{ en posant } \tau = t-a \Rightarrow d\tau = dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(a) e^{-2i\pi fa} \int_{\mathbb{R}} u(\tau) e^{2i\pi f\tau} d\tau da \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} v(a) e^{-2i\pi fa} da \right) \left(\int_{\mathbb{R}} u(\tau) e^{2i\pi f\tau} d\tau \right) \\ &= F[u](f) \times F[v](f) \end{aligned}$$

Preuve 2 $\forall f \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (F[u] * F[v])(f) &= \int_{\mathbb{R}} F[u](f-x) F[v](x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F[v](x) u(t) e^{-2i\pi(f-x)t} dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-2i\pi ft} \left(\int_{\mathbb{R}} F[v](x) u(t) e^{2i\pi xt} dx \right) dt \text{ d'après fubini} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{F} F[v](t) u(t) e^{-2i\pi ft} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(t) u(t) e^{-2i\pi ft} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} v(t) u(t) e^{-2i\pi ft} dt \text{ on a bien égalité des intégrales car } v \in L^1(\mathbb{R}), F[v] \in L^1(\mathbb{R}) \\ &= F[uv](f) \end{aligned}$$

1.3 Impulsion de Dirac

1.3.1 Proposition 8.29

Enoncé

$$\forall f \in \mathbb{R}, F[\delta_0](f) = 1 \text{ et } F[\delta_x](f) = e^{-2i\pi f x}$$

Preuve

$$\begin{aligned} & \text{— } \forall f \in \mathbb{R}, F[\delta_0] = \int_{\mathbb{R}} \delta_0 e^{-2i\pi f t} . dt = e^{-2i\pi f \times 0} = 1 \\ & \text{— } \delta_a = \delta_0(t - a) + \text{théorème du retard} \\ \implies & F[\delta_a](f) = e^{-2i\pi f a} \end{aligned}$$