

PTITES FICHES

Chapitre 1

norme : $N: E \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} N(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ \forall (x, y) \in E^2, N(x+y) \leq N(x) + N(y) \end{cases}$$

inégalité triangulaire

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^m |x_j| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2} \quad \|x\|_\infty = \max_{j \in [1, m]} |x_j|$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^m x_j y_j \Rightarrow \|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$$

N_1, N_2 équivalentes $\Leftrightarrow \exists (c, c') \in (\mathbb{R}^+)^2, c N_1(x) \leq N_2(x) \leq c' N_1(x)$
 vraie pour $\mathbb{R}^n$ car dim finie

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|x - y\| < r\}$ (boule ouverte de centre x)
 $\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|x - y\| \leq r\}$ (boule fermée de centre x) et rayon r

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ouvert de $\mathbb{R}^m \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = \emptyset \text{ ou} \\ \Omega \neq \emptyset \text{ et } \forall a \in \Omega, \exists r > 0, B(a, r) \subset \Omega \end{cases}$

$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ ← fonction composante
 $\forall k \in [1, n], f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f_k(x_1, \dots, x_n)$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, j \in [1, n],$
 j -ième app. partielle de f en a : $f_{a,j}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$

- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$: ensemble des apps linéaires de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.
- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$: ensemble des formes linéaires.
- affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^p, \varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p), \forall x \in \mathbb{R}^n, p(x) = a + \varphi(x)$
- $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ app bilinéaire
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire et $\forall y \in \mathbb{R}^n, x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire
 φ est une forme bilinéaire si $p=1$.
- forme quadratique: $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \exists \varphi$ une forme bilinéaire symétrique tel que: $q(x) = \varphi(x, x)$

$$q(x) = q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{jj} x_j^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

$\mathbb{R}^n$ ou ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $(g, p) \in \mathbb{N}^*$

g tend vers a : $\begin{cases} a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^p \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|g(x) - b\| \leq \varepsilon \end{cases}$
 g continue en a : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|g(x) - g(a)\| \leq \varepsilon \end{cases}$
 g continue sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow g$ continue en tout point de $\mathbb{R}$.

$a \in \mathbb{R}$. g continue en $a \Rightarrow \forall j \in [1, n]$ $f_{a,j}$ continue en a ;

g continue sur $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists M \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \|g(x)\|_{\mathbb{R}^p} \leq M \|x\|_{\mathbb{R}^n}$

toutes app linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est continue (car dim finie).

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|g(x)\|_{\mathbb{R}^p}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} = 1} \|g(x)\|_{\mathbb{R}^p} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq 1} \|g(x)\|_{\mathbb{R}^p} = \|g\|$$

- $\hookrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \|g(x)\| \leq \|g\| \cdot \|x\|$
- $\hookrightarrow \|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.
- $\hookrightarrow \|g\|$ dépend des normes choisies sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Ω : ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p, (n, p) \in \mathbb{N}^*$

PTITES FICHES

Chapitre 2/1

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$$

f dérivable en $x \iff$ limite du taux d'accroissement en x existe

$$\iff h \text{ "petit", } f(x+h) = f(x) + \ell h + h \mathcal{E}(h)$$

$$\text{Ls au } \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E}(h) = 0 \text{ et } \ell \in \mathbb{R}^p.$$

Ls $h \mapsto \ell h$ est linéaire.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ dérivable en x

$\iff \exists \lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire, $\eta > 0$ et $\mathcal{E}:]-\eta; \eta[\rightarrow \mathbb{R}^p$

$$\forall h \in]-\eta; \eta[, f(x+h) = f(x) + \lambda(h) + h \mathcal{E}(h) \text{ avec } \mathcal{E}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

f différentiable en x

$\iff \exists \lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire, $\eta > 0$ et $\mathcal{E}: B_{\mathbb{R}^n}(0, \eta) \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$\forall h \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \eta), f(x+h) = f(x) + \lambda(h) + \|h\| \mathcal{E}(h)$$

λ est la différentielle de f en x ($D_f(x)$) $\hookrightarrow \mathcal{E}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

$$D_f(x) \iff D_{f_x} \iff df_x \text{ (notations)}$$

f différentiable en x

$\iff$ pour h "petit", $f(x+h) = f(x) + D_f(x)(h) + \|h\| \mathcal{E}(h)$

$$\iff f(x) = f(a) + D_f(a)(x-a) + \|x-a\| \mathcal{E}(h) \quad \hookrightarrow \mathcal{E}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Unicité : f différentiable en x

$$\Rightarrow \text{unicité de } D_f(x)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

Continuité : f différentiable en $x \Rightarrow f$ continue en x .

Linéarité : ensemble des app. différentiable est un EV.

$\iff f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en $x \in \Omega$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g$ différentiable en x et

$$D(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda D_f(x) + \mu D_g(x)$$

Composante : $x \in \Omega$, f différentiable en x

$\iff \forall j \in [1, p], f_j$ différentiable en x .

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ si f différentiable en tout point de Ω
 et si $D_f: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est continue
 $\Leftrightarrow \forall x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \Omega, \|x - y\| < \eta \Rightarrow \|D_f(x) - D_f(y)\| < \varepsilon$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en $x \in \Omega$ (avec $\boxed{\Omega \subset \mathbb{R}}$)
 $\Leftrightarrow f$ dérivable en x
 et on a: $\forall h \in \mathbb{R}, D_f(x)(h) = h f'(x)$
 $f'(x) = D_f(x)(1) \in \mathbb{R}^p$
 $\dim = 1$

$f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ cst $\Rightarrow f$ différentiable en tt points de Ω
 $D_f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \Rightarrow f$ différentiable en tt points $x \in \mathbb{R}^n$
 $D_f(x) = f \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k} \rightarrow \mathbb{R}^p$ multilinéaire $\Rightarrow f$ différentiable en tt points
 $\forall (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k} \quad \forall (h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k}$
 $D_f(x_1, \dots, x_k)(h_1, \dots, h_k) = \sum_{j=1}^k f(x_1, \dots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \dots, x_k)$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \Rightarrow \begin{cases} f \text{ différentiable sur } \mathbb{R}^n \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n \\ D_f(x)(h) = 2 \sum_{j=1}^n x_j h_j = 2 \langle x, h \rangle \end{cases}$

$n, p, q \in \mathbb{N}^*$, $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ $f(\Omega) \subset \Omega'$, $x \in \Omega$
 $g: \Omega' \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$

f différentiable en x $\wedge$ g différentiable en $f(x)$ $\Rightarrow g \circ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ différentiable en x
 $D(g \circ f)(x) = D_g(f(x)) \circ D_f(x)$

i.e. $\forall h \in \mathbb{R}^n, D(g \circ f)(x)(h) = D_g(f(x)) [D_f(x)(h)]$

$\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^1(\Omega) \\ g \in \mathcal{C}^1(\Omega') \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

$\| \cdot \|_2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\forall x \neq 0, \forall h \in \mathbb{R}^n$,
 $D(\| \cdot \|_2)(x)(h) = \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|_2}$

Chapitre 2 1/2

Auxiliaire
"universelle"

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ Soit $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$, $[a, a+h] \subset \Omega$
 $\hookrightarrow$ avant de $\mathbb{R}^n$

$u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^p$
 $t \mapsto f(a+th)$

f différentiable en $a \Rightarrow$ l'auxiliaire u dérivable en 0
 $[u'(0) = D_f(a)(h)]$

f différentiable en $\forall$ point de $\Omega \Rightarrow f|_u$ dérivable sur $[0,1]$
 $[u'(t) = D_f(a+th)(h)]$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p \in \mathcal{C}^1 \Rightarrow \forall (a,b) \in \Omega^2, [a,b] \subset \Omega$
 $\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \cdot \sup_{x \in [a,b]} \|D_f(x)\|$
 $\hookrightarrow$ inégalité des accroissements finis.

- Ω convexe si $\forall (a,b) \in \Omega^2, [a,b] \subset \Omega$
- Ω convexe et $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable sur Ω ,
 de diff nulle $\Rightarrow f$ cst sur Ω

continuité: chose à tester:

x, y fixe

y, x fixe

$x = y$

$x = 2y$

$x = y^2$

produit dérivées partielles continues $\Leftrightarrow f \in \mathcal{C}^1(a) \Rightarrow f$ diff en $a \Rightarrow f \in \mathcal{C}^0(a)$
 $\Downarrow$
 produit dérivées partielles.

PTITES FICHES

Chapitre 3/1

$a \in \Omega, j \in [1, n]$

$\tilde{f}_{a,j} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ est la j -ième application partielle de f en a
 $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_{x_j} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}_{a,j}(a_j + t) - \tilde{f}_{a,j}(a_j)}{t}$$

$\hookrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in \mathbb{R}^p$. Si f scalaire ($p=1$), alors $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \in \mathbb{R}$.

$\hookrightarrow$ on dit ici que f admet une dérivée partielle d'indice j en a .

f différentiable en $a \Rightarrow \forall j \in [1, n], \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_f(a)(e_j)$

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, D_f(a)(h) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Ω ouvert non vide de $\mathbb{R}^n, a \in \Omega, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$
 f admet des dérivées partielles sur Ω et ses dérivées ^{part.} sont continues
 en $a \Rightarrow f$ différentiable en a
 $\forall h \in \mathbb{R}^n, D_f(a)(h) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p, \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$
 $\Leftrightarrow f$ admet des dérivées partielles $\mathcal{C}^0(\Omega)$.

Jacobienne. $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en a .

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n, D_f(a)(h) = J_f(a)h = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

$\hookrightarrow f$ scalaire $\Rightarrow J_f(a)$ est une matrice ligne.

$\hookrightarrow f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}^n, D_f(a) = f$ et $\forall a \in \mathbb{R}^n, J_f(a) = \text{Mat}(f, B_n, B_p)$

$\hookrightarrow f$ affine $\Rightarrow f = c + \Phi$ où $c \in \mathbb{R}^p$ et $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

$\forall a \in \mathbb{R}^n, D_f(a) = \Phi$ et $J_f(a) = \text{Mat}(\Phi, B_n, B_p)$

Jacobien ($n=p$)

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable au point $a \in \Omega$.

$$\text{Jacobien} = \det J_f(a) = \frac{D(f_1, \dots, f_n)(a)}{D(x_1, \dots, x_n)}$$

Gradient de $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire

$a \in \Omega$ admet des dérivées partielles en a

$$\Rightarrow \nabla f(a) = \text{grad } f(a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) e_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$$D_f(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

Formule de la chaîne: Soient $(n, p, q) \in (\mathbb{N}^*)^3$,

Soient Ω, Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$. $P(\Omega) \subset \Omega'$

$[g \in \mathcal{C}^1(\Omega', \mathbb{R}^q)]$ $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \Omega, (y_1, \dots, y_q) \in \Omega'$

$F = g \circ f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^q)$ et $\forall x \in \Omega$,

$$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, q], \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

$$\hookrightarrow \underbrace{J_{g \circ f}(x)}_{\in H_{q,n}} = \underbrace{J_g(P(x))}_{\in H_{q,p}} \underbrace{J_f(x)}_{\in H_{p,n}}$$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p \in \mathcal{C}^k(\Omega) \Leftrightarrow$ toutes les dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω .

La composée de deux applications $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Hessienne: $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

Thm de Schwarz: $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. $a \in \Omega$

si f admet des dérivées partielles secondes sur Ω

et si elles sont continues $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)$$

Chapitre 3/2

$f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, $H_f(a)$ est symétrique $\forall a \in \Omega$.
 $Q_f(a)(h) = \langle H_f(a)h, h \rangle = {}^t h H_f(a) h$. $\forall h \in \mathbb{R}^n$
 ↪ forme quadratique associée à $H_f(a)$.

Taylor-Young $\left\{ \begin{array}{l} f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2, a \in \Omega, h \in \mathbb{R}^n, [a, a+h] \subset \Omega \\ \Rightarrow f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \int_0^1 (1-t) h^T H_f(a+th) h dt \\ \text{où } \nabla f(a) \text{ est le gradient de } f \text{ en } a \text{ et } H_f(a) \\ \text{la matrice Hessienne de } f \text{ en } a. \end{array} \right.$

Taylor-Young. $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2, a \in \Omega,$
 $h \in \mathbb{R}^n, [a, a+h] \subset \Omega$
 $\Rightarrow f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \|h\|^2 \varepsilon(h)$
 ε définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
 $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Chapitre 4

Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. f admet un extremum local si au point a il existe une boule $B(a, r) \subset \Omega$,

$$\forall x \in B(a, r), f(x) \leq f(a) \quad (\text{maximum})$$

$$\forall x \in B(a, r), f(x) \geq f(a) \quad (\text{minimum})$$

$\hookrightarrow$ extremum strict si inégalités strictes

point critique de f : $\forall$ points $a \in \Omega$ $\left\{ \begin{array}{l} D_g(a) = 0 \text{ ou} \\ \text{dérivée partielle s'annule} \end{array} \right.$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a \in \Omega$

" $\Leftrightarrow$ gradient $= 0$ "

f admet un extremum en a $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ différentiable en } a \end{array} \right. \Rightarrow a$ est un point critique de f .

$$f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

$f \in \mathcal{C}^2 \xrightarrow{\text{Schwarz}} H_f(a)$ symétrique $\Rightarrow$ diagonalisable en b.o.n (on note S_f son spectre)

$f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$ un point critique.

- ① $\forall \lambda \in S_f(a), \lambda > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local strict en a
- ② $\forall \mu \in S_f(a), \mu < 0 \Rightarrow f$ admet un maximum local strict en a
- ③ $\exists (\lambda, \mu) \in S_f(a)^+, \mu < 0 < \lambda \Rightarrow f$ n'admet pas d'extremum mais
- ④ sinon on peut rien dire $\searrow$ point selle ou point col en a .

$f \in \mathcal{C}^2(\Omega \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R}), a \in \Omega$ un point critique de f .

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a); s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a); t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \quad H_f(a) = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$$

- ① $rt - s^2 > 0$ et $r > 0 \Rightarrow$ minimum local strict en a .
- ② $rt - s^2 > 0$ et $r < 0 \Rightarrow$ maximum local strict en a .
- ③ $rt - s^2 < 0 \Rightarrow$ pas d'extremum en a mais point selle.
- ④ $rt - s^2 = 0 \Rightarrow$ on ne peut rien conclure.

PTITES FICHES

Chapitre 5

Difféomorphisme : U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}^*$.

$$f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

f est une bijection de $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$

$$f \in \mathcal{C}^k(U)$$

$$f^{-1} \in \mathcal{C}^k(V)$$

$\Rightarrow f$ est un
difféomorphisme
de classe $\mathcal{C}^k$.

U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, $k \in \mathbb{N}^*$.

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme de $\mathcal{C}^k$ (au voisinage de a) si :

① $a \in \Omega \subset U$.

② $\Omega' = f(\Omega)$ est ouvert

③ $f|_{\Omega}: \Omega \rightarrow \Omega'$ est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme.

thm d'inverse
local.

U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^k(U)$, $k \in \mathbb{N}^*$, $a \in U$,
 $D_p f(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit bijective ($\Leftrightarrow \det J_p f(a) \neq 0$)
 $\Rightarrow f$ est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme au voisinage de a .

U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^k(U)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Soient $\begin{cases} a = (a_1, \dots, a_n) \in U \\ b = f(a) \end{cases}$

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = y_n \end{cases}$$

$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) \neq 0 \Rightarrow \exists \Omega \subset U$, $a \in \Omega$

$\exists \Omega'$, $\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \Omega'$, $y = f(x)$ possède une unique solution $x \in \Omega$.

et $x_1, \dots, x_n$ (solutions) sont des fonctions $\mathcal{C}^k$ de $y_1, \dots, y_n$ ($\Leftrightarrow x = \Phi(y) \Rightarrow \Phi \in \mathcal{C}^k(\Omega')$)

thm
d'inverse
global.

U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ injective, de classe $\mathcal{C}^k$ sur U ,
 $k \in \mathbb{N}^*$.

$f(U)$ ouvert

$\forall x \in U$, $D_p f(x)$ bijective $\Rightarrow f|_U: U \rightarrow f(U) \in \mathcal{C}^k$ -difféomorphisme

$\Leftrightarrow J_p f(a)$ inversible
 $\Leftrightarrow \det J_p f(a) \neq 0$

$$\Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^2, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^k, (a,b) \in \Omega$$

$$\left. \begin{array}{l} p(a,b) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y}(a,b) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists (A,B) \in (\mathbb{R}^+)^2 \\ \exists \varphi:]a-A, a+A[\rightarrow]b-B, b+B[\in \mathcal{C}^k, \\ \cdot \varphi(a) = b \\ \cdot p(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x) \quad \forall x \in]a-A, a+A[\end{array} \right.$$

quitte à diminuer $A > 0, \forall x \in]a-A, a+A[$,

$$\varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial p}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial p}{\partial y}(x, \varphi(x))} \quad \varphi \text{ est la fonction implicite définie par } p(x,y) = 0 \text{ au voisinage de } (a,b).$$

$p(x,y) = 0$ à $p \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^2)$ (a,b) une solution ($\Leftrightarrow p(a,b) = 0$)

$$\frac{\partial p}{\partial y}(a,b) \neq 0 \Rightarrow \exists (A,B) \in (\mathbb{R}^+)^2, \forall x \in]a-A, a+A[, \text{ l'équation } p(x,y) = 0 \text{ possède une unique solution } y \text{ dans }]b-B, b+B[.$$

Ω_1, Ω_2 ouverts de $\mathbb{R}^n$

$$\varphi: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2 \in \mathcal{C}^1\text{-difféo.} \Rightarrow \varphi \text{ est un changement de variables.}$$

Ω_1 ouvert de $\mathbb{R}^n, \varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega_1)$ appl. injective, $\forall x \in \Omega_1$, $D\varphi(x)$ bijective $\Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^1\text{-difféo}(\Omega_1, \varphi(\Omega_1))$

$$J_{\varphi^{-1}}(\varphi(x)) = (J_{\varphi}(x))^{-1}$$

$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(r,\theta) \mapsto (x,y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
polaire

$\varphi \in \mathcal{C}^2\text{-difféo} (U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[, \varphi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \in \mathbb{R}^-\})$

$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \nabla g(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} \Delta g(r,\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$

$g = f \circ \varphi \Rightarrow \varepsilon = (e_r, e_\theta) \quad e_r = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2, \quad e_\theta = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(r,\theta,\varphi) \mapsto (x,y,z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r \varphi)$
cylindrique

$\varphi \in \mathcal{C}^2\text{-difféo} (U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}, \varphi(U))$

$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \nabla g(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,\varphi) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) \end{pmatrix} \Delta g(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta,\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,\varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta,\varphi) + \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}(r,\theta,\varphi)$

$g = f \circ \varphi \Rightarrow \varepsilon = (e_r, e_\theta, e_\varphi) \quad e_r = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2, \quad e_\theta = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2, \quad e_\varphi = e_3$

$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(r,\theta,\varphi) \mapsto (x,y,z) = (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$
sphérique

$\varphi \text{ est } \mathcal{C}^2\text{-difféo} (U = \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[, \varphi(U))$

$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \nabla g(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,\varphi) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi) \end{pmatrix} \Delta g(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial g}{\partial r})(r,\theta,\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta})(r,\theta,\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}(r,\theta,\varphi)$

$g = f \circ \varphi \Rightarrow \varepsilon = (e_r, e_\theta, e_\varphi) \quad e_r = \cos \varphi \sin \theta e_1 + \sin \varphi \sin \theta e_2 + \cos \theta e_3, \quad e_\theta = -\sin \varphi \sin \theta e_1 + \cos \varphi \sin \theta e_2 - \sin \theta e_3, \quad e_\varphi = -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2$

PTITES FICHES

CHAPITRE 6

$f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\Rightarrow \forall x \in]a, b[, F(x) = \int_a^x p(t) dt.$$

$$\int_a^b p(t) dt$$

L'intégrale converge si F admet une limite finie en x tendant $\nearrow \in \mathbb{R}$.
 $\int_a^b p(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} F(x)$ (intégrale généralisée au impropre).

$f, g \in \mathcal{C}^0([a, b[), (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\left. \begin{array}{l} \int_a^b p(x) dx \\ \int_a^b g(x) dx \end{array} \right\} \text{ convergentes } \Rightarrow \int_a^b (\lambda p(x) + \mu g(x)) dx \text{ converge } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Riemann. $\forall \alpha > 0$,

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ cv} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ cv} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

$$\hookrightarrow \alpha < 1 \Leftrightarrow \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \text{ cv} \Leftrightarrow \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \forall a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$$

$f \in \mathcal{C}^0([a, b[), (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\left. \begin{array}{l} b \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow b} f(x) = L \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ cv}$$

$$\left. \begin{array}{l} b = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ dv}$$

Thm fondamental: $f \in \mathcal{C}^0([a, b[) \Rightarrow \left[\int_a^b p(t) dt \text{ cv} \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [a, b[, \int_a^x p(t) dt \leq A \right]$

Comparaison: $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b[)$ et positive. $\forall x \in [a, b[, 0 \leq p(x) \leq g(x)$

$$\bullet \int_a^b g(x) dx \text{ cv} \Rightarrow \int_a^b p(x) dx \text{ cv.}$$

$$\bullet \int_a^b p(x) dx \text{ dv} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ dv.}$$

$$\bullet p(x) = o(g(x))_{x \rightarrow b} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ cv} \Rightarrow \int_a^b p(x) dx \text{ cv}$$

$$\left(\int_a^b p(x) dx \text{ dv} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ dv} \right)$$

équivalents: $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b[)$ et positive. $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$
 $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^b g(x) dx$ de m nature
cv ou dv simultanément.

$f \in \mathcal{C}^0([a, b[)$, $\int_a^b |f(x)| dx$ cv $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ absolument convergent
 $\Leftrightarrow$ absolue convergence $\Rightarrow$ convergence.

$f \in \mathcal{C}^0([a, b[)$, $\int_a^b f(x) dx$ cv
 mais ne CVA pas $\Rightarrow$ semi convergente.

Théorème d'Abel.

$a \in \mathbb{R}$. u, v deux fonctions, uv continue sur $[a, +\infty[$.

- $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t, t' \geq a, \left| \int_t^{t'} v(x) dx \right| \leq M$
- u décroissante sur $[a, +\infty[$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} u(x)v(x) dx$ cv.

PTITES FICHES

CHAPITRE 7/1

Théorème de Weierstrass

$$f \in \mathcal{C}^0(\Omega) \text{ avec } \Omega = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f$ bornée, f atteint ses bornes sur Ω , c-à-d
 $\exists (\alpha, \beta) \in \Omega^2, \forall x \in \Omega, f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. f est dite uniformément continue.

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \Omega^2, \|x - y\| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Thm de Heine

$$f \in \mathcal{C}^0(\Omega) \text{ avec } \Omega = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

$\Rightarrow f$ uniformément continue sur Ω .

$f \in \mathcal{C}^0(I \subset \mathbb{R})$, F la primitive de f , $f(a \in I) = 0$.

$$F: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

$\Rightarrow F \in \mathcal{C}^1(I)$ et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

$$I, J \subset \mathbb{R} \quad f: \Omega = I \times J \rightarrow \mathbb{R}$$

si f a un sens,

$$g: J \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_I f(t, x) dt$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow D_g &= \{x \in J \mid f_x(t) = f(t, x) \text{ est intégrable sur } I\} \\ &= \{x \in J \mid \int_I f(t, x) dt \text{ converge}\} \end{aligned}$$

Soit $(c, d) \in \mathbb{R}^2, c < d, I \subset \mathbb{R}, f: \Omega = I \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

* régularité : $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$

* majoration : $\exists \varphi_0: I \rightarrow \mathbb{R}_+,$

$$\bullet \forall (t, x) \in \Omega, |f(t, x)| \leq \varphi_0(t)$$

$$\bullet \int_I \varphi_0(t) dt \text{ converge.}$$

$\Rightarrow g: x \mapsto \int_I f(t, x) dt$
 existe et est continue
 sur $[c, d]$.

Dérivabilité de l'intégrale à paramètre :

- * f continue sur $I \times [c, d]$
- * $\exists \varphi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^+$,
 - $\hookrightarrow \forall (t, x) \in I \times [c, d], |f(t, x)| \leq \varphi_0(t)$
 - $\hookrightarrow \int_I \varphi_0(t) dt$ converge.
- * $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $I \times [c, d]$.
- * $\exists \varphi_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^+$,
 - $\hookrightarrow \forall (t, x) \in I \times [c, d], \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \varphi_1(t)$
 - $\hookrightarrow \int_I \varphi_1(t) dt$ converge.

$$\Rightarrow g : x \mapsto \int_I f(t, x) dt \in \mathcal{C}^1([c, d])$$

$$\forall x \in [c, d], g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt$$

↳ Corollaire ($\mathcal{C}^n$)

- * $f \in \mathcal{C}^0(I \times [c, d])$
- * $\exists \varphi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^+$,
 - $\hookrightarrow \forall (t, x) \in I \times [c, d], |f(t, x)| \leq \varphi_0(t)$
 - $\hookrightarrow \int_I \varphi_0(t) dt$ converge.
- * $\forall k \in [1, n], \frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ existe et est continue sur $I \times [c, d]$
- * $\forall k \in [1, n], \exists \varphi_k : I \rightarrow \mathbb{R}^+$,
 - $\hookrightarrow \forall (t, x) \in I \times [c, d], \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) \right| \leq \varphi_k(t)$
 - $\hookrightarrow \int_I \varphi_k(t) dt$ converge.

$$\Rightarrow g : x \mapsto \int_I f(t, x) dt \in \mathcal{C}^n([c, d])$$

$$\forall k \in [1, n], \forall x \in [c, d], g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(t, x) dt$$

Fubini : $a < b, c < d \in \mathbb{R}, f : \Delta = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(\Delta)$

$$\Rightarrow g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \in \mathcal{C}^0([c, d])$$

$$x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$$

$$\int_c^d g(x) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(t, x) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(t, x) dx \right) dt$$

Gamma (d'Euler)

$\forall x > 0, \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente

$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} & (\text{fonct. Gamma d'Euler}) \\ x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \Gamma(1) = 1$$

$$\hookrightarrow \forall x > 0, \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

$$\hookrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n+1) = n!$$

$$\hookrightarrow \Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \exists c \in]1, 2[, \Gamma \text{ décroissante sur }]0, c[\\ \Gamma \text{ croissante sur }]c, +\infty[\end{cases}$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) = +\infty$$

) sur $\mathbb{R}^*$

Par prolongement,

$$\Gamma: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt & \text{si } x > 0 \\ \frac{\Gamma(x+n+1)}{\prod_{i=0}^n (x+i)} & \text{si } x \in]-(n+1), -n[\text{ , } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow n \text{ pair} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -n^-} \Gamma(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow -n^+} \Gamma(x) = +\infty \end{cases}$$

Γ admet un maximum relatif sur $]-n-1, -n[$

$$\hookrightarrow n \text{ impair} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -n^-} \Gamma(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow -n^+} \Gamma(x) = -\infty \end{cases}$$

Γ admet un minimum relatif sur $]-n-1, -n[$

Transformée de Laplace

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall t < 0, f(t) = 0.$$

$$\text{On note } H: t \mapsto H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (\text{échelon unité ou fonction de Heaviside})$$

On appelle transformée de Laplace de f la fonction $F = \mathcal{L}[f]$ de la variable complexe p définie par :

$$F(p) = \mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

f est l'originale et F l'image.

Si elle existe, $\mathcal{L}^{-1}(F) = f$

- ⊛
- ⊛ $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[)$
 - ⊛ f Absolument intégrable au voisinage de 0^+ .
 - ⊛ $\exists A, C, \gamma \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in \mathbb{R}, t > A \Rightarrow |f(t)| < Ce^{\gamma t}$
- $\Rightarrow f$ admet une transformée de Laplace F pour $p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > \gamma$

Table des form^s usuelles : cf cours p. 51.

Linéarité : $\forall (f, g), \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$

cf SNCF $\Rightarrow$

Thm du retard : $\tau \in \mathbb{R}, g(t) = f(t - \tau)H(t - \tau).$
 $\mathcal{L}[g](p) = e^{-\tau p} \mathcal{L}[f](p)$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f$ et f' vérifie ⊛

$$\mathcal{L}[f'](p) = p \mathcal{L}[f](p) - f(0^+)$$

Intégration : $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*)$ vérifie ⊛

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right](p) = \frac{\mathcal{L}[f](p)}{p}$$

compact élémentaire

Mesure de A : $|A| = \mu(A) = \int_A 1 dx$
 $\uparrow$ compact

$\forall A, A_1, A_2$ 3 compacts élémentaire,

* Linéarité : $\forall (f, g), \forall x \in A, f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_A f(x) dx \leq \int_A g(x) dx$

* Majoration : $\forall f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}), \left| \int_A f(x) dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx \leq \mu(A) \|f\|_\infty$

* Additivité : A_1, A_2 d'intersection disjointe, $\forall f \in \mathcal{C}^0(A_1 \cup A_2, \mathbb{R}),$

$$\int_{A_1 \cup A_2} f(x) dx = \int_{A_1} f(x) dx + \int_{A_2} f(x) dx$$

$\hookrightarrow A$ compact de $\mathbb{R}^2,$

$\int_A f(x) dx = \iint_A f(x, y) dx dy$ on parle d'intégrale double, de $\mathbb{R}^3$: triple...

A compact mesurable de $\mathbb{R}^n$ } Valeur moyenne
 $f: A \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}) \quad \int = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x) dx$

Thm de la moyenne :

A compact de $\mathbb{R}^n$ } $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists x_0 \in A, \frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x) dx = f(x_0) \\ \forall g \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}) \text{ positive}, \exists x_0 \in A, \int_A f(x) g(x) dx = f(x_0) \int_A g(x) dx \end{array} \right.$

P pavé de $\mathbb{R}^n$ et Q pavé de $\mathbb{R}^m, n, m \geq 1. f: P \times Q \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$
 $\Rightarrow \int_{P \times Q} f(x, y) dx dy = \int_P \left(\int_Q f(x, y) dy \right) dx = \int_Q \left(\int_P f(x, y) dx \right) dy \xrightarrow{(x, y) \mapsto f(x, y)}$
 $\uparrow$ Fubini

$\hookrightarrow P$ pavé de $\mathbb{R}^n, Q$ pavé de $\mathbb{R}^m, n, m \geq 1, f: P \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: Q \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0$
 $\Rightarrow \int_{P \times Q} f(x) g(y) dx dy = \left(\int_P f(x) dx \right) \left(\int_Q g(y) dy \right)$

Ω ouvert de $\mathbb{R}^n, \varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

A un compact élémentaire, $A \subset \Omega. f \in \mathcal{C}^0(\varphi(A), \mathbb{R})$

$\Rightarrow \int \varphi(A)$ un compact élémentaire $\xrightarrow{\text{déterminant de la jacobienne}}$

$$\int_{\varphi(A)} f(x) dx = \int_A (f \circ \varphi)(x) |Jac(\varphi)(x)| dx$$