

PTITES FICHES

CHAPITRE 1 (SIGNAL)

$$L^1(\mathbb{R}) = \{s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt < +\infty\}$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \{s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < +\infty\}$$

$$\hookrightarrow \langle s, \tau \rangle = \int_{\mathbb{R}} s(t) \overline{\tau(t)} dt$$

$$\hookrightarrow s \text{ orthogonal à } \tau \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \langle s, \tau \rangle = 0$$

$$\|s\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt$$

$$\hookrightarrow s \in L_1(\mathbb{R})$$

$$\|s\|_2 = \sqrt{\langle s, s \rangle} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt}$$

$$\hookrightarrow s \in L_2(\mathbb{R})$$

$$s \stackrel{p.p.}{=} 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt = 0$$

presque partout

$$s_1 \stackrel{p.p.}{=} s_2 \Leftrightarrow s_1 - s_2 \stackrel{p.p.}{=} 0$$

$$\forall p \in \mathbb{R}, F[s](p) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2i\pi pt} dt = \hat{s}(p) \text{ Transformée de Fourier}$$

$$\forall (u, \lambda) \in L^1(\mathbb{R})^2 \times \mathbb{C}, F[\lambda u + v] = \lambda F[u] + F[v]$$

$$s \in L^1(\mathbb{R}), \forall p \in \mathbb{R}, |F[s](p)| \leq \|s\|_1$$

$$\hookrightarrow F[s](p) \xrightarrow{p \rightarrow \pm\infty} 0$$

$$s \in L^1(\mathbb{R}), s_-: t \mapsto s(-t)$$

$$\forall p \in \mathbb{R}, F[s_-](p) = F[s](-p)$$

$$s \in L^1(\mathbb{R}), \forall p \in \mathbb{R}, F[\bar{s}](p) = \overline{F[s](-p)}$$

$$s \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$s \text{ paire} \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}, F[s](p) = 2 \int_0^{+\infty} s(t) \cos(2\pi pt) dt$$

$$s \text{ impaire} \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}, F[s](p) = -2i \int_0^{+\infty} s(t) \sin(2\pi pt) dt$$

$$s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow |F[s]| \text{ est paire et } \text{Arg}(F[s]) \text{ impaire}$$

$$s \in L^1(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \int H_a: t \mapsto at, \forall p \in \mathbb{R},$$

$$F[s \circ H_a](p) = \frac{1}{|a|} F[s]\left(\frac{p}{a}\right) = F[s(at)](p)$$

Théorème du retard, $s \in L^1(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}, U_a: t \mapsto t-a$
 $\forall p \in \mathbb{R}, F[s \circ U_a](p) = e^{-2i\pi p a} F[s](p) = F[s(t-a)](p)$

$s \in L^1(\mathbb{R}), p_0 \in \mathbb{R}, e^{2i\pi p_0 t} = t \mapsto e^{2i\pi p_0 t}$
 $\forall p \in \mathbb{R}, F[e^{2i\pi p_0 \cdot} s](p) = F[s](p - p_0)$

$s \in L^1(\mathbb{R})$ dérivable, $s' \in L^1(\mathbb{R})$ } sert à rien
 $\Rightarrow \lim_{s \rightarrow \pm\infty} s = 0$ } à part démon.

⚠ important $\left[\begin{array}{l} s \in L^1(\mathbb{R}) \text{ dérivable, } s' \in L^1(\mathbb{R}) \\ \Rightarrow F[s'](p) = 2i\pi p F[s](p) \\ \hookrightarrow \text{si } s^{(p)} \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow F[s^{(p)}](p) = (2i\pi p)^p F[s](p) \\ s \in L^1(\mathbb{R}), \forall p \in \mathbb{N}, t \mapsto t^p s(t) \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow F[s^{(p)}](p) = (-2i\pi)^p F[t^p s](p) \\ \hookrightarrow \text{si } s^{(p)} \in L^1(\mathbb{R}), |F[s](p)| \leq \frac{\|s^{(p)}\|_1}{(2\pi p)^p} \end{array} \right.$

$s \in L^1(\mathbb{R})$ dérivable } $F[s]$ dérivable p fois
 $\forall p \in \mathbb{N}, (.)^p s: t \mapsto t^p s(t) \in L^1(\mathbb{R}) \} \Rightarrow F[s]^{(p)}(p) = (-2i\pi)^p F[t^p s](p)$

$u, v \in L^1(\mathbb{R}), u * v(a) = \int_{\mathbb{R}} u(a-t) v(t) dt$ produit de convolution
 $\hookrightarrow \forall (u, v) \in L^1(\mathbb{R})^2, u * v = v * u$ $\hookrightarrow$ existe presque partout
 $\hookrightarrow \forall (u, v, w) \in L^1(\mathbb{R})^3, (u * v) * w = u * (v * w)$
 $\hookrightarrow \forall (u, v) \in L^1(\mathbb{R})^2, \|u * v\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1$

$u, v \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow u * v$ existe, est continue, est bornée
 $(\forall t \in \mathbb{R}, |(u * v)(t)| \leq \|u\|_1 \|v\|_1)$
 $\hookrightarrow u * v$ n'est pas nécessairement dans $L^2(\mathbb{R})$!!!

$u, v \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow F[u * v] = F[u] F[v]$
 $u, v \in L^1(\mathbb{R})$
 $F[u] \in L^\infty(\mathbb{R}), F[v] \in L^\infty(\mathbb{R}) \} \Rightarrow F[uv] = F[u] * F[v]$

PTITES FICHES

CHAPITRE 1₂ (SIGNAL)

DIRAC $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_x(x) p(x) dx = p(0) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_x(x) dx = 1$
 $\delta_x(t) = \delta_0(t-x)$ $\left[\delta_0 * f = f, f \in \mathcal{C}^\infty \right]$

$\forall p \in \mathbb{R}, F[\delta_0](p) = 1$ et $F[\delta_x](p) = e^{-2i\pi x p}$

TF inverse : $s \in L^1(\mathbb{R})$

$$\bar{F}[s](t) = \int_{\mathbb{R}} s(p) e^{2i\pi p t} dp$$

$\hookrightarrow \forall s \in L^1(\mathbb{R}), F[s] \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow s \stackrel{\mathcal{C}^p}{=} \bar{F} F[s]$

$\hookrightarrow \forall s$ continue, $F[s] \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow s \stackrel{\mathcal{C}^p}{=} \bar{F} F[s]$

$\hookrightarrow \forall s \in \mathcal{C}_c^1$ par morceaux, $F[s] \in L^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \frac{1}{2} [s(t+0) + s(t-0)] = \frac{1}{2} [s(t^+) + s(t^-)] = \bar{F} F[s]$

$(u, v) \in (L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}))^2$

$\Rightarrow \begin{cases} F[u] \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } \|F[u]\|_2 = \|u\|_2 \\ \langle u, v \rangle = \langle F[u], F[v] \rangle \end{cases}$

$\tilde{u}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^{+N} F[u](p) e^{2i\pi p t} dp \Rightarrow u \stackrel{\mathcal{C}^p}{=} \tilde{u}$

Isomorphisme de Fourier-Plancherel : $(u, v) \in L^2(\mathbb{R})^2$

$\Rightarrow F[u](p) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^{+N} u(t) e^{-2i\pi p t} dt$ par la norme de $L^2(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow$ isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ (bijection)

$\hookrightarrow$ Parseval-Plancherel : $\begin{cases} \langle u, v \rangle = \langle F[u], F[v] \rangle \\ \|F[u]\|_2 = \|u\|_2 \end{cases}$

échelon de Heaviside : $u(t) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$

PARTIE II

$$y(t) = \mathcal{P}[x(t)]$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \mathcal{P}[x_1(t) + x_2(t)] &= \mathcal{P}[x_1(t)] + \mathcal{P}[x_2(t)] \\ \hookrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \mathcal{P}[ax(t)] &= a \mathcal{P}[x(t)] \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \hookrightarrow \mathcal{P}[x_1(t) + x_2(t)] &= \mathcal{P}[x_1(t)] + \mathcal{P}[x_2(t)] \\ \hookrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \mathcal{P}[ax(t)] &= a \mathcal{P}[x(t)] \end{aligned}} \right\} \Leftrightarrow \mathcal{P} \text{ linéaire}$$

$$\mathcal{P} \text{ invariant} \Leftrightarrow (\forall t_0 \in \mathbb{R}, \mathcal{P}[x(t)] = y(t) \Rightarrow \mathcal{P}[x(t - t_0)] = y(t - t_0))$$

réponse impulsionnelle : $h(t)$.

$$\bullet h(t) = \mathcal{P}[\delta(t)] \Rightarrow y(t) = [h * x](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$$\bullet y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$\boxed{y(x) = x * h(x)}$$

$\hookrightarrow \forall x, y, \dots$

Fréquentiel :

$H(p)$: fonction de transfert d'un LTI :

$$H(p) = \mathcal{F}[h](p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2i\pi p t} dt$$

$$\bullet x(t) = e^{-2i\pi p_0 t} \Rightarrow y(t) = x(t) H(p_0)$$

$$\hookrightarrow H(p) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y(t)}{e^{2i\pi p t}}$$

$$\bullet H(p) = |H(p)| e^{i \arg(H(p))}$$

$$G_{dB} = 20 \log_{10} (|H(p)|)$$

$$|H(p_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{p \in \mathbb{R}^+} |H(p)| \quad G_{dB}(p_c) = \max_{p \in \mathbb{R}^+} (G_{dB}(p)) - 3$$

$$\bullet \text{causal} \Leftrightarrow \forall t < t_0, x(t) = 0 \Rightarrow \forall t < t_0, y(t) = 0$$

$$\bullet \text{un linéaire invariant est causal} \Leftrightarrow \forall t < 0, h(t) = 0$$

Energie signal : $s \in L^2(\mathbb{R}) \quad E_s = \int_{\mathbb{R}} \|s(t)\|^2 dt = \|s\|_2^2$

densité spectrale d'énergie :

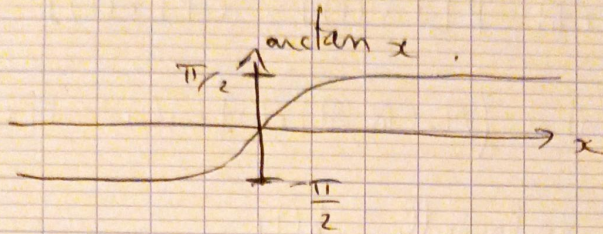
$$\mathcal{F}[p_x](p) = |x(p)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(\tau) e^{-2i\pi p \tau} d\tau$$

$$\hookrightarrow \text{avec } p_x(t) = x(t) * \overline{x(-t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \overline{x(t - \tau)} d\tau$$

au sens de BIBO

• syst stable $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, |x(t)| \leq A \in \mathbb{R} \rightarrow \forall t \in \mathbb{R} |y(t)| \leq B \in \mathbb{R}$

• un LTI est stable $\Leftrightarrow h \in L^1(\mathbb{R})$



fréquence fondamentale = f_0 puis $2f_0, 3f_0, 4f_0$

Shannon : $F_c > 2f_0 \times n$ ← n : nombre d'harmoniques

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \cos\left(\frac{nt \cdot 2\pi}{T_0}\right) dt$$

$$S_n = a_0(f) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{kx \cdot 2\pi}{T_0}\right) + b_k \sin\left(\frac{kx \cdot 2\pi}{T_0}\right) \right) \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \sin\left(\frac{nt \cdot 2\pi}{T_0}\right) dt$$

$$\Delta f = \frac{1}{T_{\text{total}}} = \text{pas fréquentiel} = \frac{F_c}{\pi}$$

Δf doit être un sous multiple de F_c

