

CHAPITRE 0

Invariances:

- par translation : invariant par translation.
- axiale : invariant par rotation autour d'un axe.
- cylindrique : invariant par (translation + rotation) autour d'un axe.
- sphérique : invariant par Θ et φ .

Symétrie : un effet à caractère / vectoriel dans le plan
pseudo-vectoriel orthogonal

Anti-symétrie : Un effet à caractère / vectoriel orthogonal
pseudo-vectoriel dans le plan

$$\vec{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \leftarrow \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\vec{dl} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

$$\vec{dl} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

$$\vec{dl} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

cartésien

cylindrique

sphérique

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{grad}} u = \vec{\text{grad}} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \left| \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = \text{div } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \left| \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = \text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right.$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0 \mid \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \vec{0} \mid \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \Delta \vec{u}$$

Helmoltz: vecteur $\Leftrightarrow$ rotationnel + divergence + origine.

Thm de STOKES ("rotationnel")

$$\oint_{C, \text{ fermé}} \vec{a} \cdot d\vec{e} = \iint_{\substack{\text{surface ouverte} \\ \text{s'appuyant sur } C}} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

Thm de GREEN OSTROGRADSKI ("divergence")

$$\oiint_{S, \text{ fermé}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau \text{ délimité par } S} \operatorname{div} \vec{a} \, d\tau$$

LEIBNITZ: $\frac{d}{dt} \int p(x, y, z, t) \, dk = \int \frac{\partial}{\partial t} p(x, y, z, t) \, dk$

CHAPITRE 1

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

$$\rho_0 \epsilon_0 C^2 = 1$$

$$* \text{rot } \vec{E}(M) = \vec{0}$$

① locale
② intégrale

$$* \text{Gauss : } \text{div } \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

$$* \text{Potentiel électrostatique : } \begin{cases} \vec{E} = -\text{grad } V \quad ③ \\ \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B \end{cases}$$

* Calcul direct

④ - Potentiel d'une charge q : $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{PM}$

- Potentiel d'une distribⁿ volumique ρ : $dV = \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{PM}$

OSEF
un peu

$$\text{POISSON : } \Delta V(M) = -\frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

$$\text{LAPLACE : } \Delta V(M) = 0$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\hat{a}\hat{b}) \cdot \vec{n}$$

$$\vec{J} = n \cdot q \cdot \vec{u} = \rho_c \vec{u} \Rightarrow \vec{J} = \sum_{i=1}^N n_i q_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^N \rho_{ci} \vec{u}_i$$

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Conservation de la charge (locale): $\text{div } \vec{J} = 0$
intégrale $\Rightarrow \oint_{S_{\text{ferm}}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \quad (\text{loi d'Ohm})$$

$$\rho = \rho_{\text{conduction}} + \rho_{\text{fixe}} = 0$$

$\hookrightarrow$ Loi de LAPLACE

MAGNETOSTATIQUE

force électrique : $\vec{F}_e = q\vec{E}$

force { magnétique
de LAPLACE : $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

force de LORENTZ : $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$\nearrow$ force électrique
 $\nearrow$ force magnétique

$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$

$\vec{B}(M) = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(P) \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} d\tau$ (Loi de BIOT & SAVART)

"le champ magnétique est à flux conservatif" :
 $\text{div } \vec{B}(M) = 0$ (locale).

Théorème d'Ampère locale : $\text{rot } \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)$

Potentiel vecteur $\vec{A}$: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ (locale)
 $\hookrightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{j} \frac{d\tau}{PM}$ (calcul direct)

Thm d'Ampère à $\vec{A}$: $\begin{cases} \Delta \vec{A}(M) = -\mu_0 \vec{j}(M) \\ \Delta \vec{A}(M) = \vec{0} \end{cases}$

	ELECTROSTATIQUE	MAGNETOSTATIQUE
Grandeurs physiques	densité volumique de charge ρ densité surfacique de charge σ champ électrostatique $\vec{E}$ Potentiel électrostatique V Inverse permittivité vide $1/\epsilon_0$	densité de courant $\vec{j}$ densité surfacique de courant $\vec{j}_s$ champ magnétique $\vec{B}$ potentiel vecteur $\vec{A}$ perméabilité magnétique vide μ_0
Relations sources/champs	Thm de Gauss $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \Leftrightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \cdot d\tau$	Thm d'Ampère $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Leftrightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{s}$
Relations champ/potentiel	$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{E} = -\text{grad } V$	$\text{div } \vec{B} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$
Relations source/potentiel	$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ avec $V(\infty) = 0$ si $\rho(\infty) = 0$	$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$ avec $\text{div } \vec{A} = 0$ et $\vec{A}(\infty) = \vec{0}$ si $\vec{j}(\infty) = \vec{0}$

CHAPITRE 2

Maxwell :

$$* \operatorname{div} \vec{E}(\Pi, t) = \frac{\rho(\Pi, t)}{\epsilon_0} \quad \rho = \rho_{\text{total}} \quad \text{Gauss}$$

$$* \operatorname{div} \vec{B}(\Pi, t) = 0 \quad \text{"} \vec{B} \text{ est à flux conservatif"}$$

$$* \operatorname{rot} \vec{E}(\Pi, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\Pi, t)}{\partial t} \quad \text{Faraday}$$

$$* \operatorname{rot} \vec{B}(\Pi, t) = \mu_0 \left[\vec{j}(\Pi, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\Pi, t)}{\partial t} \right] \quad \text{et } \vec{j} = \vec{j}_{\text{total}} \text{ Ampère.}$$

$$\uparrow \uparrow$$

$$\operatorname{div} \vec{j}(\Pi, t) + \frac{\partial \rho(\Pi, t)}{\partial t} = 0 \leftarrow \text{conservation de la charge.}$$

$$\vec{B}(\Pi, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\Pi, t)$$

$$\vec{E}(\Pi, t) = - \operatorname{grad} V(\Pi, t) - \frac{\partial \vec{A}(\Pi, t)}{\partial t}$$

généralisation de la jauge de Coulomb: la jauge de LORENTZ

$$\operatorname{div} \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Jauge Coulomb

Propagation de $\vec{A}$:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

Propagation de V :

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dans la cadre de la jauge de Lorentz

$$\vec{A} = V$$

$$\mu_0 = 1/\epsilon_0$$

$$\vec{j} = \rho$$

p. 28
2 autres
éqas de propa.

$$V(\Pi, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\Pi', t-\frac{r}{c})}{r} d\tau$$

$$\vec{A}(\Pi, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\Pi', t-\frac{r}{c})}{r} d\tau$$

Potentiel retardés.

Propagation de $\vec{E}$: $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad } \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$

analogues dans le vide

" dans le vide

Propagation de $\vec{B}$: $\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \text{rot } \vec{j}$

" dans le vide

$$P = \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot d\tau = - \iiint \frac{\text{div } \vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} d\tau - \iiint \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \cdot d\tau$$

densité électromagnétique: $u(\tau, t) = \frac{\epsilon_0 E^2(\tau, t)}{2} + \frac{B^2(\tau, t)}{2\mu_0}$

$\uparrow$
 $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$

Vecteur de Poynting: $\vec{\pi}(\tau, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

$\uparrow$
 $\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \Leftrightarrow \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$

Conservation de l'énergie:

forme locale: $-\vec{j} \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{\pi} + \frac{\partial u}{\partial t}$

forme intégrale: $-\iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot d\tau - \oint \vec{\pi} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau$

$= \frac{du}{dt}$

CHAPITRE 3

ARQS $\Leftrightarrow$ Approximation des régimes quasi-stationnaires

$$\hookrightarrow \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\hookrightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\hookrightarrow V \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho}{r} d\tau$$

$$\hookrightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}}{r} d\tau$$

$\hookrightarrow$ on néglige c ($c \rightarrow +\infty$)

$\hookrightarrow$ pas de propagation !

$$\left[\Delta t \ll T \text{ soit } r \ll cT = \lambda = \frac{c}{f} \right] \Rightarrow \text{ARQS}$$

$\Delta t = \frac{r}{c} = \text{retard.}$

Maxwell-Ampère devient : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ $\text{car } \epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} \approx 0$

$$\text{div } \vec{J} = 0.$$

Force de Laplace : $d\vec{F} = \vec{J} d\tau \wedge \vec{B}$
 $\vec{I} d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ si fil.

c pareil mais différent $\rightarrow dW = I \cdot \delta\phi_c \leftarrow$ on sait pas c ici.

$\rightarrow dW = I \cdot \delta\phi \leftarrow$ lorsque $\vec{B}$ est stationnaire.

fem induite : $e = \oint_c \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\delta\phi}{dt}$ ou $-\frac{\delta Q_c}{dt}$

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

c fixe dans $\vec{B}(t)$

$\vec{B}$ statique

SELF INDUCTION: $\Phi = LI$ avec $L > 0$
 $\leftarrow$ coefficient de self induct.
 $\leftarrow$ plus propre

MUTUELLE INDUCTION:

absence de $I_2 \Rightarrow \Phi_{12} = \pi_{12} I_1$
 $\Phi_{11} = L_1 I_1$

same pour I_1 + thm superposition:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & \pi \\ \pi & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

π est le coefficient de mutuelle inductance (H)

Transfo: $\frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} \leftarrow$ tension
 $\leftarrow$ nb de spire

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S B ds \cos \theta = B \iint_S ds \cos \theta$$

générateur: $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad e = - \frac{d\Phi}{dt} = B S \omega \sin \omega t$

plane $\Rightarrow$ transverse

progressive : temps et espace liés

onde

onde plane

CHAPITRE 4

E et B sont dans le plan $(n, \vec{E}, \vec{B})$.

- * OP : $\{ \uparrow \uparrow$ plan $\perp$ à direct° de propag est un plan d'onde
 } le champ électromag. vérifie Maxwell et Amplitude est.
 $\hookrightarrow \vec{E}$ et $\vec{B}$ transverses ($\perp$ à direct° de propag)
 $\vec{E} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{B} \cdot \vec{u} = 0$ Onde plane progressive

- * une OP peut être décomposée en deux OPP se propageant selon la même direction suivant les 2 sens opposés, avec la même vitesse.

$\hookrightarrow$ une OP selon (O_x) : $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1(x,t) \\ E_2(x,t) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3(x,t) \end{pmatrix}$ $\left| \begin{matrix} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = \vec{0} \end{matrix} \right.$ (dans le vide)

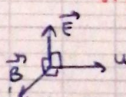
Résonnons sur $\vec{E}$:

équa de propag $\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = 0 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0, i \in \{1, 2\}$

$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(x,t) = K_1 \vec{E}'(x-ct) + K_2 \vec{E}''(x+ct) \\ \vec{B}(x,t) = Q_1 \vec{B}'(x-ct) + Q_2 \vec{B}''(x+ct) \end{cases}$ $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$
 $(Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^2$

OP se propageant à la vitesse c vers les x croissants

OP se propageant à la vitesse c vers les x décroissants

$\vec{u}$ la direct° d'une OPP : $\vec{u} \wedge \vec{E} = c \vec{B}$ 

- * OPPM : onde plane progressive monochromatique.
 aka onde planes sinusoïdales ou harmoniques

$\hookrightarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos \left[\frac{\omega}{c}(x-ct) + \phi_1 \right] \\ E_{0z} \cos \left[\frac{\omega}{c}(x-ct) + \phi_2 \right] \end{pmatrix}$ $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{0y} \cos \left[\frac{\omega}{c}(x-ct) + \phi_1 \right] \\ B_{0z} \cos \left[\frac{\omega}{c}(x-ct) + \phi_2 \right] \end{pmatrix}$
 période $\rightarrow$
 à x fixe : $T = \frac{2\pi}{\omega}$
 à t fixe : $\lambda = c.T$ amplitude est $\in \mathbb{R}^+$
période spatiale
longueur d'onde dans le vide

Représentation complexe : $[\vec{E}]$

$[\vec{E}] = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \exp[j(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \phi_1)] \\ E_{0z} \exp[j(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \phi_2)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{E}_0 \exp(-j\omega t) \end{pmatrix}$ $= E_{0y} \exp[j(\frac{\omega}{c}x + \phi_1)]$
 $=$ amplitude complexe
 vecteur d'onde dans le vide : $\vec{k}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{u}$

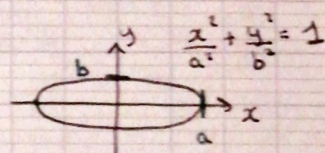
OPPM: $\begin{cases} \text{div}[\vec{E}] = j\vec{k}_0 \cdot [\vec{E}] & \text{rot}[\vec{E}] = j\vec{k}_0 \wedge [\vec{E}] \\ \text{div}[\vec{B}] = j\vec{k}_0 \cdot [\vec{B}] & \text{rot}[\vec{B}] = j\vec{k}_0 \wedge [\vec{B}] \end{cases}$
 $\frac{\partial^n}{\partial t^n} [\vec{E}_i] = (-j\omega)^n [\vec{E}_i] \text{ et } \frac{\partial^n}{\partial t^n} [\vec{B}_i] = (-j\omega)^n [\vec{B}_i]$

$\star \int [\vec{E}_i] dt = \frac{-1}{j\omega} [\vec{E}_i] + f(x, y, z)$

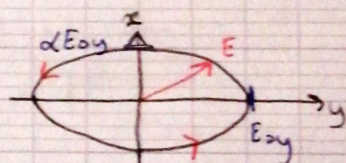
$\star \frac{\partial^n}{\partial x^n} [\vec{E}_i] = (j\frac{\omega}{c})^n [\vec{E}_i]$
idem pour B

$\star \int [\vec{E}_i] dx = \frac{1}{j\frac{\omega}{c}} [\vec{E}_i] + g(y, z, t)$

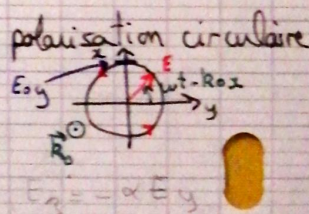
OPPM $\Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{E} = c \cdot \vec{B}$



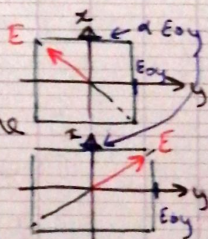
$\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_z^2}{E_{0z}^2} = 1$



$\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha = 1 \Rightarrow E_y^2 + E_z^2 = E_{0y}^2$



$\varphi = 0 \Rightarrow \text{polarisation rectiligne}$



$\varphi = \pi \Rightarrow E_z = -\alpha E_y$
 $\varphi = 0 \Rightarrow E_z = \alpha E_y$

$\text{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ dans le vide. } (-j\vec{E} = 0)$

$P = -\frac{du}{dt} = \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \text{ Thm de Poynting}$

$I = \frac{d\Phi_{\vec{\Pi}}}{ds} = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \cos \theta$

$u_e = u_m = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad \vec{\Pi} = c(u_e + u_m) \vec{u}$

$I = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \cdot c$

polarisation dépend de φ

u et $\vec{\Pi}$ en valeurs instantanées!
 pas complexe.

isotrope $\Rightarrow$ parité dans la direction.

est τ -périodique $\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau P(t) dt$