

MITES FICHES

CHAPITRE 1

univers : Ω , événement élémentaire : $\omega \in \Omega$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Omega = \mathbb{N}^* \\ \Omega = \mathbb{R}^n \end{array}} \begin{array}{l} \text{ex.} \\ \Rightarrow \text{dénombrable} \rightarrow \text{univers discret.} \\ \Rightarrow \text{non dénombrable} \rightarrow \text{univers continu.} \end{array}$$

$\emptyset$ est l'événement impossible, Ω est l'événement certain

$A^c = \bar{A}$ est l'événement contraire $\bar{A} = \{\omega \in \Omega; \omega \notin A\}$
 $\bar{A}$ réalisé $\Leftrightarrow A$ non réalisé

union : $A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$

intersection : $A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$

inclusion : $A \subset B \Leftrightarrow \forall \omega \in A, \omega \in B$

A et B incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ (A et B disjoints)
 $\hookrightarrow A$ et $\bar{A}$ incompatibles.

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- } Loi de Morgan

$\mathcal{A}$ est une tribu sur $\Omega \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A} \\ \bullet \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \\ \bullet \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \end{array} \right.$
 $(\Omega, \mathcal{A})$ = espace probabilisable

Ω fini ou dénombrable, $\mathcal{P}(\Omega)$ (toutes parties de Ω)
 est une tribu de Ω .

$\mathcal{A}$ est une tribu $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ est une tribu $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}$

- $\mathcal{A}$ stable par union finie.
Sont $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}, A_n \neq \emptyset$
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{A}$
- $\mathcal{A}$ stable par intersection finie/dénombrable.

$$\left[\bigcup_{n=1}^N A_n \right]^c = \bigcap_{n=1}^N A_n^c \in \mathcal{A}$$

$(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.

probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$: $\mathcal{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$

- $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
- $(A_n)_{n \geq 1}$ 2 à 2 disjoints
 $\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n)$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ est un espace de probabilité.

A et B deux événements aléatoires.

- $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} 2 \text{ à } 2$ incompatibles.

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \mathcal{P}(A_n)$$

$\hookrightarrow A$ et B incompatibles $\Rightarrow \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$

- $\mathcal{P}(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}(A)$
- $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$
- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$
- Ω fini ou dénombrable $\Rightarrow \forall A, \mathcal{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathcal{P}(\{\omega\})$
- $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}, (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(A_n) = \mathcal{P}(A)$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{car } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ \text{[lim sup]} \end{array} \right.$
- ——— décroissante $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(A_n) = \mathcal{P}(A)$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{car } A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \\ \text{[lim inf]} \end{array} \right.$

E un ensemble à n éléments et $p \in [0, 1]$, p parus n

ordre + répétition $\Rightarrow \frac{n!}{(n-p)!}$

ordre + répétition $\Rightarrow \frac{n!}{(n-p)!}$

ordre + répétition $\Rightarrow \frac{n!}{(n-p)!}$

$\frac{n!}{(n-p)!} = C_n^p = \binom{n}{p}$ & $p!$ est par l'ordre (ne pas l'utiliser)

PTITES
FICHES

CHAPITRE 2

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(P de A sachant B)
avec $P(B) \neq 0$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité.

$P_B: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ est une proba sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

$$A \mapsto P(A|B)$$

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$$

$$P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B) - P(A_1 \cap A_2 | B)$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A|B) = 0$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$B \subset A \Rightarrow P(A|B) = 1$$

$$\Rightarrow A \cap B = B$$

$$A \subset B \Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow A \cap B = A$$

$$P(B) > 0 \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

$$\text{plus g\'en\'erale: } P\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \prod_{i=1}^N P(A_i | \bigcap_{n=1}^{i-1} A_n)$$

$I \subset \mathbb{N}$, $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de Ω si :

$$* \forall i \in I, A_i \neq \emptyset$$

$$* \Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$* A_i \text{ 2 \`a 2 incompatibles: } \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$P(A) \in]0, 1[\Rightarrow P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

$$A_i \text{ est une partition de } \Omega, \forall i \in I, P(A_i) > 0, \left. \begin{array}{l} \Rightarrow P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i) \end{array} \right\} \text{Formule des probabilit\'es totales}$$

Formule de Bayes.

$$P(A) \in]0, 1[, P(B) > 0$$

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$$

↳ plus généralement: (A_i) partition de Ω , $\forall i \in I$, $P(A_i) > 0$,
 $\forall j \in I$, $P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)}$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de probabilité. A et B indépendants:
 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

indépendants $\neq$ incompatibles

probabiliste
 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Ensembliste
 $A \cap B = \emptyset$

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A^c \text{ et } B \\ A \text{ et } B^c \\ A^c \text{ et } B^c \end{array} \right\} \text{ indépendants.}$$

$$P(B) \neq 0 \Rightarrow [A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A|B) = P(A)]$$

$N \geq 2$, $(A_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ des événements aléatoires.

↳ 2 à 2 indépendants si $\forall (i, j)$, $i \neq j$, $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$

↳ indépendants dans leur ensemble si $\forall k \in [2, N]$

et $\forall$ le choix d'indices distincts $i_1, \dots, i_k$ on a:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times P(A_{i_2}) \times \dots \times P(A_{i_k}).$$

La 2nd notion d'indépendance est l'indépendance 2 à 2.

PTITES FICHES

CHAPITRE 3/1

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad B \subset \mathbb{R} \Rightarrow X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}$$

↑ image réciproque de B par X.

variable aléatoire réelle (v.a.r.) : $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $\{ \forall B \subset \mathbb{R}, X^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}$
 $\hookrightarrow X(\Omega) = \{X(\omega) \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ est le support de X (ensemble image).

$\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de $\Omega \Rightarrow$ ttes applications sur $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire.

loi de probabilité: $P_X: B \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$P_X(B) = \underbrace{P(X^{-1}(B))}_{\in \mathcal{A}} = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\}) = P(X \in B)$$

abus de notation.

$$B = \{x\} \Rightarrow P(X=x)$$

$$B =]-\infty; x] \Rightarrow P(X \leq x)$$

} par abus de notation.

fonction de répartition: $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x)$

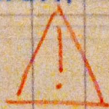
- $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$
- F_X converge vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.
- F_X croissante
- F_X continue à droite

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$F_X: I \subset \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ le quantile d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ de X est le nombre $x_\alpha \in \mathbb{R}, F_X(x_\alpha) = \alpha \Rightarrow P(X \leq x_\alpha) = \alpha$

$x_{1/2}$ est la médiane de X: $F_X(\frac{1}{2}) = P(X \leq x_{1/2}) = \frac{1}{2} = P(X > x_{1/2})$

F_X pas strictement croissante } $\Rightarrow x_\alpha = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F_X(x) \geq \alpha\}$
 simplement croissante }



moyenne $\neq$ médiane !!!

var aléatoire avec nombre fini ou dénombrable de valeurs est appelé variable aléatoire discrète.

Soit X une var discrète à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable $X(\Omega)$. La loi de probabilité de X est entièrement déterminée par l'ensemble des probabilités $P_x(x) = P(X=x)$. $\forall x \in X(\Omega)$

Var aléatoire à valeurs dans $X(\Omega)$,

$$P(X \in \Omega) = P(X^{-1}(\Omega)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = 1.$$

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Fonctⁿ indicatrice de A : $\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

X une var aléatoire prenant un nombre infini non dénombrable de valeurs. Si F_x est une fonctⁿ continue, on dit que X est une variable aléatoire continue.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ f est la densité de la var. aléatoire continue X si $\forall a < b$,

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = [F_x]_a^b = F_x(b) - F_x(a)$$

où f est la dérivée de F_x en tout point où elle est dérivable.

$$\hookrightarrow F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(t) dt.$$

$$\hookrightarrow P(a < x \leq b) = \int_{-\infty}^b f_x(x) dx - \int_{-\infty}^a f_x(x) dx = \int_a^b f_x(x) dx$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F_x(x) = 1 \text{ donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) dx = 1$$

$\hookrightarrow f$ continue par morceaux.

$\left\{ \begin{array}{l} X \text{ une var. aléatoire continue. } P(X=x) = \lim_{h \rightarrow 0} P(x-h < X \leq x) \\ \quad = \lim_{h \rightarrow 0} (F_x(x-h) - F_x(x)) \\ \quad = 0 \text{ car } F_x \text{ continue.} \\ \forall a, b, a < b, \\ F_x(b) - F_x(a) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) \\ \quad = P(a < X < b) \end{array} \right.$
 $\rightarrow$ ne fonctionne pas si X est discret!!!

PTITES FICHES

CHAPITRE 3/2

X une var. aléatoire.

- ① X une var. aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble $X(\Omega)$ (fini ou dénombrable). L'espérance de X :

$$E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x) \quad (\text{à condition que cette série converge, } X(\Omega) \text{ infini})$$

- ② X une var. aléatoire continue admettant une densité f_x , l'espérance: $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx$ (si l'intégrale converge).

X une var. aléatoire et $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow h(X)$ une var. aléatoire

- ① X var. al. discrète à valeurs dans $X(\Omega)$
 $\Rightarrow E[h(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} h(x) P(X=x)$ (si la série cv (dans le cas $X(\Omega)$ infini))

- ② X var. al. continue admettant une densité f_x .
 $E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_x(x) dx$ (si l'intégrale cv)

$$\hookrightarrow h = \mathbb{I}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} \Rightarrow E[h(X)] = E[X]$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow h = \mathbb{I}_A(x) &\Rightarrow E[h(X)] = E[\mathbb{I}_A(X)] = P(X \in A) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_A(x) f_x(x) dx \\ &= \int_A f_x(x) dx \rightarrow \text{on dehors de } A \end{aligned}$$

X var. aléatoire et $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow h(X)$ une var. al. dont on peut déterminer la loi.

- Cas discret: $X(\Omega)$ fini ou dénombrable. $Y = h(X)$ dont le support est $Y(\Omega) = h(X(\Omega))$. $\forall y \in Y(\Omega)$,

$$Y = h(X) = y \Leftrightarrow X \in h^{-1}(\{y\}) = A_y = \{\omega \in X(\Omega), h(\omega) = y\}$$

$$\forall (y, z) \in (Y(\Omega))^2, y \neq z \Rightarrow A_y \cap A_z = \emptyset \text{ et } \bigcup_{y \in Y(\Omega)} A_y = X(\Omega)$$

$$\forall y \in Y(\Omega), P(Y=y) = P(X \in A_y)$$

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y=y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X \in A_y) = P(\bigcup_{y \in Y(\Omega)} A_y) = P(X \in \Omega) = 1$$

- Cas continu: h strictement croissante et bijective.

$\forall y \in \mathbb{R}$, F_x et F_y les fonct° de répartition de X et Y .

$$\begin{aligned} F_y(y) &= P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) \quad h(x) = y \Leftrightarrow x \leq h^{-1}(y) \\ &= P(X \leq h^{-1}(y)) \text{ car } h \text{ bijective \& croissante.} \\ &= F_x(h^{-1}(y)) \end{aligned}$$

et la densité s'obtient en dérivant la fonction de répartition

$$\textcircled{1} X \text{ var. al. est et } X=a \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} P(X=a)=1 \\ E[X]=a \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ Positivité : } X \geq 0 \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0$$

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, E[f(X) + g(X)] = E[f(X)] + E[g(X)]$$

$E[X]$ = "valeur moyenne de X"

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2]$$

$$\hookrightarrow \forall X, \text{Var}[X] \geq 0$$

$$\hookrightarrow \text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[X(X-1)] + E[X] - E[X]^2$$

$$\hookrightarrow \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[X]$$

$$\hookrightarrow \text{Inégalité de Cauchy-Schwarz : } |E[X]| \leq \sqrt{E[X^2]}$$

$$\hookrightarrow E[X^2] < \infty \Rightarrow E[X] < \infty$$

$$\text{écart-type de } X : \sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$$

$$E[X] = 0 \Rightarrow X \text{ centrée}$$

$$\text{Var}[X] = 1 \Rightarrow X \text{ réduite}$$

$$\left. \begin{array}{l} E[X] = m \\ \text{Var}[X] = \sigma^2 \end{array} \right\} \Rightarrow Y = \frac{X - m}{\sigma} \text{ est centrée réduite.}$$

$$p > 0, \text{ Moment d'ordre } p : E[X^p]$$

$$p > 0, \text{ Moment centré d'ordre } p : E[(X - E[X])^p]$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, fonct^o caractéristique :

$$\Phi_X(t) = E[e^{itX}] = \begin{cases} \sum_{x \in X(\Omega)} e^{itx} P(X=x) & \text{si } X \text{ discrète à valeurs dans } \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx & \text{si } X \text{ continue de densité } f_X \end{cases}$$

$\hookrightarrow X$ et Y ont la même fonct^o caractéristiques

$\Rightarrow X$ et Y ont la même loi.

CHAPITRE 3 ¹³

- $X \sim B(p)$ Loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
si $x(n) = \{0, 1\}$ $P(X=0) = 1-p$
 "échec" "succès" $P(X=1) = p$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X] = p \\ \text{Var}[X] = p(1-p) \\ \Phi_x(t) = pe^{it} + 1 - np, \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- $X \sim \text{Bin}(n, p)$ Loi binomiale de paramètre (n, p) .
si $X(\Omega) = [0, n]$, $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
 $\sum_{k=0}^n P(X=k) = (p+1-p)^n = 1$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X] = np \\ \text{Var}[X] = np(1-p) \\ \Phi_X(t) = (pe^{it} + 1-p)^n, \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- $X \sim G(p)$ Loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$
 si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\forall k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

probabilité d'échouer les $k-1$ éme essais

$$\begin{cases} E[X] = \frac{1}{p} \\ \text{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2} \\ \Phi_x(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

X est le premier succès d'une loi binomiale

- $X \sim P(\lambda)$ Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$
 si $X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
 $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X] = \lambda \\ \text{Var}[X] = \lambda \\ \Phi_x(t) = \exp[\lambda(e^{it} - 1)], t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ Loi uniforme $[a, b]$
si $f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a, b]}(x)$

$$\int_{\mathbb{R}} f_x(x) dx = 1$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{Var}[X] = \left(\frac{b-a}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ Loi exponentielle, $\lambda > 0$
si $f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$$

$$\text{Var}[X] = 1/\lambda^2$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\forall \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \int_0^{+\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{n!}{\lambda^n}}$$

- $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ Loi normale (ou gaussienne) ($m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$)
si $f_x(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$, $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[X] = m$$

$$\text{Var}[X] = \sigma^2$$

$$\Phi_x(t) = e^{itm - \frac{t^2 \sigma^2}{2}}, t \in \mathbb{R}$$

↳ cas particulier: $\mathcal{N}(0, 1)$, $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$ ← gaussien

↳ $X = \frac{Y-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ centrée réduite

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. On appelle variable aléatoire (réelle) de dimension N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et dont les coordonnées sont des variables aléatoires réelles.

↳ Dans la suite, on considérera $N=2$.

Loi de probabilité de $Z = (X, Y)$ par $IP((X, Y) \in D)$ où D est un pavé de $\mathbb{R}^2$.

Fonction de répartition: $F_{(X,Y)}(u,v) = IP((X,Y) \in D)$ où $D =]-\infty, u] \times]-\infty, v]$
 $= P(\{X \leq u\} \cap \{Y \leq v\})$

- loi de $Z = (X, Y)$ est la "loi jointe des variables X et Y "
- loi de X et Y est "la première ou seconde loi marginale du couple"

Z est discret si $Z(\Omega)$ est finie ou dénombrable de $\mathbb{R}^2$.
 Z est discret $\Leftrightarrow X$ et Y sont des v.a.r. discrètes.

$$\hookrightarrow \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} IP((X, Y) = (x_i, y_j)) = 1$$

$$\hookrightarrow \forall i \in I, P(X = x_i) = \sum_{j \in J} IP((X, Y) = (x_i, y_j))$$

$$\hookrightarrow \forall j \in J, P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} IP((X, Y) = (x_i, y_j))$$

la loi jointe détermine complètement les lois marginales mais la réciproque est fautive.

$\exists f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+, IP((X, Y) \in D) = \int_D f(x, y) dx dy \Rightarrow (X, Y)$ continu.
 D un pavé de $\mathbb{R}^2$ $\hookrightarrow$ densité de (X, Y) .

$$\hookrightarrow IP((X, Y) \in \mathbb{R}^2) = 1$$

Lois marginales de X et Y :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) dy \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y) dx$$

(X,Y) un couple aléatoire,

- * $\forall I, J$ deux intervalles, $P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J) \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$
- * Cas discret : $\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), P(X=x \cap Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y)$ (indépendance)
 $\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$
- * Cas continu : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, p(x,y) = p_X(x) p_Y(y) \Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

La jointe est le produit des marginales
 $\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}, E[\alpha(X)\beta(Y)] = E[\alpha(X)]E[\beta(Y)]$$

$$\hookrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \alpha(X) \perp\!\!\!\perp \beta(Y)$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \Phi_{X+Y} = \Phi_X + \Phi_Y \quad (\text{fonctions caractéristiques})$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow F_{\alpha, \gamma}(u,v) = F_X(u)F_Y(v), \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

fonction de répartition

$$\bar{\Phi}_{\alpha, \gamma}(u,v) = E[e^{i(ux+vy)}], \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \bar{\Phi}_{\alpha, \gamma}(u,v) = \bar{\Phi}_X(u) \bar{\Phi}_Y(v), \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

(X,Y) un couple discret

$$\textcircled{1} \forall y \in Y(\Omega), P(Y=y) > 0,$$

$$\Rightarrow \forall x \in X(\Omega), P(X=x | Y=y) = \frac{P((X,Y) = (x,y))}{P(Y=y)} \\ = \frac{P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})}{P(Y=y)}$$

$$\textcircled{2} \forall x \in X(\Omega), P(X=x) > 0,$$

$$\Rightarrow \forall y \in Y(\Omega), P(Y=y | X=x) = \frac{P((X,Y) = (x,y))}{P(X=x)}$$

PETITES

CHAPITRE 4/2

FICHES (X, Y) continue de densité jointe g .

$$\textcircled{1} \forall y \in \mathbb{R}, f_Y(y) > 0, f_X^{Y=y}(x) = \frac{g(x, y)}{f_Y(y)}, x \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) > 0, f_Y^{X=x}(y) = \frac{g(x, y)}{f_X(x)}, y \in \mathbb{R}$$

$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et (X, Y) aléatoire, $(U, V) = \varphi(X, Y)$.

g densité jointe de (X, Y) . $\varphi \in \mathcal{C}^1$ -difféo de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) > 0\}$
 $\Rightarrow \mathbb{E}[h \circ \varphi(X, Y)] = \mathbb{E}[h(U, V)] = \iint_{\mathbb{R}^2} h(\varphi(x, y)) g(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} h(u, v) \underbrace{g(u, v)}_{\substack{\text{densité de la loi} \\ \text{de } (U, V)}} du dv$
 $(u, v) = \varphi(x, y)$

(X, Y) aléatoire, X et Y possèdent une variance

$$\Rightarrow \text{covariance} = \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] \\ = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$\bullet \text{Cov}(X, X) = \text{Var}[X]$$

$$\bullet \forall a \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, a) = 0$$

$$\bullet \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \text{Cov}(aX + b, Y) = a \text{Cov}(X, Y)$$

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2 \text{Cov}[X, Y]$$

$$\left. \begin{array}{l} X \perp\!\!\!\perp Y \\ \exists \text{Var } X \\ \exists \text{Var } Y \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0 \Rightarrow \text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$$

↙ réciproque fautive !!!

coefficient de corrélation linéaire: $\rho_{(X, Y)} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

↳ Cauchy-Schwarz: $|\rho_{(X, Y)}| \leq 1$

↳ $\rho_{(X, Y)} = \pm 1 \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \mathbb{P}(aX + bY = c) = 1$

CHAPITRE 5

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de var aléatoire et X une var aléatoire

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{P} X \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t), \forall t \text{ pt de continuité de } F_X \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{L} X \end{array} \right.$$

$\xrightarrow{P}$ cv en proba vers X
 $\xrightarrow{L}$ cv en loi

$$X_n \xrightarrow{L} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_{X_n}(t) = \Phi_X(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ et } Y_n \xrightarrow{P} Y, (X_n)_{n \geq 1} \text{ et } (Y_n)_{n \geq 1}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0 \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{P} f(X) \\ \bullet \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha X_n + \beta Y_n \xrightarrow{P} \alpha X + \beta Y \\ \bullet X_n Y_n \xrightarrow{P} XY \end{array} \right.$$

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$$

reciproque si $X \in \mathbb{R}$ constante

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0 \text{ et } (X_n)_{n \geq 1}, X_n \xrightarrow{L} X \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{L} f(X)$$

Lemme de Slutsky $(X_n)_{n \geq 1}, (Y_n)_{n \geq 1}$

$$\left. \begin{array}{l} X_n \xrightarrow{L} X \\ Y_n \xrightarrow{P} a \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_n + Y_n \xrightarrow{L} X + a \\ X_n Y_n \xrightarrow{L} aX \end{array} \right.$$

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{E[|X|]}{\varepsilon} \quad \text{Inégalité de Markov}$$

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2} \quad \text{Inégalité de Bienaymé-Tchebychev}$$

PTITES FICHES

CHAPITRE 5 _{1/2}

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite var II et de même loi. Loi des Grands nombres
 $\Rightarrow \bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{P} \mathbb{E}[X_1]$ LGN

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite var II et de même loi admettant une variance σ^2 et une espérance de m . LGN $\Rightarrow \bar{X}_N - m \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{P} 0$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite var II $\leadsto \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
 $\Rightarrow \bar{X}_N \leadsto \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{N}) \Rightarrow \sqrt{N} \left(\frac{\bar{X}_N - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \right) \leadsto \mathcal{N}(0, 1)$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite var II et de même loi, d'espérance $\mathbb{E}[X_1]$ et de variance $\text{Var}[X_1]$ finies

Thm
central
limite

TCL
ou TLC

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{\bar{X}_N - \mathbb{E}[\bar{X}_N]}{\sqrt{\text{Var } \bar{X}_N}} = \sqrt{N} \left(\frac{\bar{X}_N - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\text{Var } X_1}} \right) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{L} \mathcal{N}(0, 1) \\ \bullet S_N = \sum_{i=1}^N X_i : \frac{\text{Variable} - \text{Espérance}}{\text{écart type}} = \frac{S_N - N \cdot \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{N \text{Var}[X_1]}} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{L} \mathcal{N}(0, 1) \end{array} \right.$

CHAPITRE 6

⚠ N-échantillon : ite suite de N var indépendante de m^{ême} loi.
On va considérer une var X associée à θ (moyenne, variance ou proportion) et un N-échantillon issu de X .

estimateur du paramètre θ : ite var $\hat{\theta}_N$ fonct^{ion} du N-échantillon issue de X .
 $\hookrightarrow$ estimat^{ion} : valeur observée d'un estimateur $\hat{\theta}_N = p(X_1, \dots, X_N)$
 $\hookrightarrow \hat{\theta}_N$ est consistant si $\hat{\theta}_N \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{P} \theta$

estimateur
sans biais :
 $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$

biais d'un estimateur $\hat{\theta}_N$ de $\theta = \mathbb{E}[\hat{\theta}_N] - \theta$
 non biaisé $\Leftrightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}_N] - \theta = 0$
 biaisé $\Leftrightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}_N] - \theta \neq 0$
 asymptotiquement sans biais $\Leftrightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}_N] \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} \theta$

$\hat{\theta}_{N_1}$ et $\hat{\theta}_{N_2}$ sans biais,
 $\text{Var}[\hat{\theta}_{N_1}] \leq \text{Var}[\hat{\theta}_{N_2}] \Rightarrow \hat{\theta}_{N_1}$ est plus efficace que $\hat{\theta}_{N_2}$

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Var}[\hat{\theta}_N] = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_N$ sans biais