1 Introduction aux chaînes de Markov

$\forall n \in \mathbb{N}, (x_0, x_1, ...x_{n-1}, x, y) \in E^{n+2}$

$$\begin{cases} \textbf{Propriété de Markov} \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) \\ \textbf{Homogénéité} \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) \text{ ne dépend pas de n} \end{cases}$$

$\implies (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de markov (homogène)

1. P est la matrice de transition
2. $P = (P(x, y))_{x,y\in E}$ est carré de taille $Card(E)$
3. $P(x, y) \in [0, 1]$
4. $\sum_{y\in E} P(x, y) = 1, x \in E$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de v.a. à valeur dans E et F.$f : E \times F \to E$

$X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$ est une chaîne de Markov

μ la loi initiale de la chaîne.$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2$ et $x_0, ..., x_{n+k} \in E$,

1. $\mathbb{P}(X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = \mu(_0) \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} P(x_i, x_{i+1})$
2. $\mathbb{P}(X_{n+k} = x_{n+k}, ..., X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = \displaystyle\prod_{i=n+1}^{n+k} P(x_{i-1}, x_i)$

$$P^n(x, y) = \sum_{z\in E} P(x, z)P^{n-1}(z, y) = \sum_{z\in E} P^{n-1}(x, z)P(z, y)$$

$$\implies \begin{cases} P^0(x, y) = \mathbb{1}_{\{x=y\}} \text{ par convention} \\ P^n \text{ est stochastique } \iff \displaystyle\sum_{y\in E} P^n(x, y) = 1, x \in E \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x) = P^n(x, y), x, y \in E$$

On note $\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{E}_x$ la probabilité et l'éspérance sachant $X_0 = x$

$$\mu P(y) = \sum_{x\in E} \mu(x)P(x, y), y \in E$$

$X_0 \rightsquigarrow \mu \implies \forall n \in \mathbb{N}, X_n \rightsquigarrow \mu P^n$

Si $Card(E)$ fini, il suffit de diagonaliser !

2 Classification des chaînes de Markov

$\exists n \in \mathbb{N}, P^n(x,y) > 0 \implies$ x mène à y ($x \rightsquigarrow y$)
(i.e. on peut atteindre y en n étapes à partir de x)
$\iff \exists n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_{n-1} \in E, P(x,x_1)P(x_1,x_2)...P(x_{n-1},y) > 0$

$\forall x, y \in E, x \sim y \iff [x \rightsquigarrow y \text{ et } y \rightsquigarrow x]$

C est une classe de communication

1. C fermée si $[\forall x \in C, x \rightsquigarrow y \implies y \in C]$
2. C ouverte si pas fermée (i.e. $\exists x \in C$ et $y \notin C, x \rightsquigarrow y$)
3. Un état x est absorbant si $\{x\}$ fermée (i.e. $P(x,x) = 1$)
4. La chaîne est irréductible si tout communique (1 seule classe de communication)

Nombre de visite de y :

$$V_y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n = y\}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{y\}}(X_n)$$

Temps de retour en y :

$$T_y = \inf\{n \geq 1, X_n = y\}$$

$\inf \emptyset = +\infty$ par convention
On parle de temps, n commence à 1 ($T_y = \inf\{n \geq 0, X_n = y\}$ dès que $X_0 \neq y$)

$y \in E$ est dit :

1. récurrent si $\mathbb{P}(V_y = \infty) = 1$
2. transitoire si $\mathbb{P}(V_y = \infty) = 0$

$n \in \mathbb{N}^*, y \in E$, temps du n-ième retour en y :

$$T_y^{(n)} = \inf\{k \geq T_y^{(n-1)} + 1, X_k = y\}$$

avec $T_y^{(0)} = 0$ et $T_y^{(1)} = T_y$

$$\mathbb{P}(T_y^{(n)} - T_y^{(n-1)} \mid T_y^{(n-1)} < \infty) = \mathbb{P}(T_y \mid X_0 = y)$$

$$y \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_y(V_y > n) = p_y^n$$

$p_y = 1 \implies \mathbb{P}_y(V_y = \infty) = 1$ (y est un état récurrent)
$p_y < 1 \implies \mathbb{P}_y(V_y \mid X_0 = y)$ est une loi géométrique de paramètre $1 - p_y$
($p_y = 0 \implies \mathbb{P}_y(V_y = 1) = 1$)

$y \in E$, on a la dichotomie suivante :

1. $\mathbb{P}_y(T_y < \infty) = 1 \iff y$ récurrent $\iff \sum_{n\in\mathbb{N}} P^n(y,y) = \infty$
2. $\mathbb{P}_y(T_y < \infty) < 1 \iff y$ transitoire $\iff \sum_{n\in\mathbb{N}} P^n(y,y) < \infty$

$$\mathbb{P}(X=\infty) = 1 \implies \begin{cases} P_y(T_y<\infty) = 1 \iff p_y = 1 \\ P_y(T_y<\infty) < 1 \iff p_y < 1 \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} P^n(y,y) = \dfrac{1}{1-p_y} \end{cases}$$

Tous les éléments d'une même classe sont de même nature, tous récurrents ou tous transitoires.

C une classe de communication :

1. C est récurrente $\implies$ C fermée
2. C ouverte $\implies$ C transitoire
3. C fermée + finie $\implies$ C récurrente
4. l'espace d'état de E est fini $\implies$ [C récurrente $\iff$ C fermée]

3 Probabilité invariantes

π une mesure sur E (de masse éventuellement ∞).

$$\pi(y) = \pi P(y), y \in E \implies \pi \text{ est une mesure invariante}$$

$$\text{avec } \pi P(y) = \sum_{x\in E} \pi(x)P(x,y), y \in E$$

π une proba $\implies$ on parle de proba
π mesure invariante $\implies \pi = \pi P^n \implies \forall n \in \mathbb{N}, X_n \rightsquigarrow \pi$

$$\left.\begin{array}{l} (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ irréductible} \\ \pi \text{ mesure invariante pas identiquement nulle} \end{array}\right\} \implies \pi(y) > 0, \forall y \in E$$

$$\left.\begin{array}{l} (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ irréductible (classe E unique)} \\ (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ récurrente} \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} \exists \text{ mesure invariante non nulle qui} \\ \text{est unique à une constante} \\ \text{multiplicative près} \end{array}$$

Dans la suite, on va considérer $V_y^x = \sum_{n=0}^{T_x-1} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}}$
On remarque que $\mathbb{E}_x(V_x^x) = \mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$
On note $\gamma_x(y) = \mathbb{E}_x(V_y^x)$ la mesure sur E
On remarque que cette valeur peut être ∞ et $\gamma_x(x) = 1$

une chaine est **irréductible + récurrente**
$\implies \forall x \in E, \gamma_x$ est une mesure invariante tq. $0 < \gamma_x(y) < \infty, \forall y \in E$

$$T_x = \sum_{n=0}^{T_x-1} 1 = \sum_{n=0}^{T_x-1} \sum_{y \in E} \mathbb{1}_{\{X_n = y\}} = \sum_{y \in E} V_y^x$$

$$\mathbb{E}_x\left[T_x\right] < \infty \iff \sum_{y \in E} \mathbb{E}_x\left[V_y^x\right] = \sum_{y \in E} \gamma_x(y) < \infty$$

Un état récurrent x est dit :

1. **récurrent positif** si $\mathbb{E}_x[T_x]$ est finie
2. **récurrent nul** sinon

Si tous les états sont récurrents positifs (resp. récurrents nuls), on dit que la chaîne est récurrente positive (resp. récurrente nulle).
Dans le cas transitoire, on a $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1 \implies \mathbb{E}_x[T_x] = \infty$

x **récurrent positif**, on définit alors π_x sur E par :

$$\pi_x(y) = \frac{\mathbb{E}_x[V_y^x]}{\mathbb{E}_x[T_x]} = \frac{\gamma_x(y)}{\sum\limits_{y \in E} \gamma_x(y)}, y \in E$$

Chaîne **irréductible + récurrente**

$$\begin{aligned} & \text{tout état de E est récurrent positif} \\ \iff & \exists \text{ un état récurrent positif} \\ \iff & \exists! \text{ proba invariante } \pi \end{aligned}$$

Dans ce cas on a $\pi = \pi_x, \forall x \in E$,

$$\pi(y) = \pi_y(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_y[T_y]}, y \in E$$

Chaîne **irréductible + récurrente**

$$\begin{aligned} & \text{tout état de E est récurrent nul} \\ \iff & \exists \text{ un état récurrent nul} \\ \iff & \exists \text{ une mesure invariante } \lambda \text{ pour la chaîne, de masse infinie, unique à constante} \\ & \text{multiplicative près} \end{aligned}$$

4 Convergence vers la probabilité invariante

On appelle **période de l'état** x le nombre :

$$d_x = pgcd\{n \in \mathbb{N}^*, P^n(x, x) > 0\}$$

L'état x est dit **apériodique** si $d_x = 1$

x et y appartiennent à une classe C $\implies$ x et y sont de même période (période de classe).

chaîne **iréductible + récurrente positive + apériodique** (i.e. seule classe E a pour période d=1).
$\implies P^n(x,y) = \mathbb{P}_x(X_n = y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(y), y \in E$

Notons $V_x^n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = x\}} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{x\}}(X_k), n \in \mathbb{N}$ chaîne irréductible transitoire $\implies$ la v.a V_x^n est majoré par V_x (fini). L'état x étant transitoire :

$$\frac{V_x^n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x]}$$

càd que la proportion de temps passé en x tend vers 0.

Chaîne **irréductible + récurrente**, $\forall$ mesure invariante λ,

$$\frac{V_y^n}{V_x^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda(y)}{\lambda(x)} = \frac{1}{\gamma_x(y)}, x, y \in E$$

et :

$$\frac{V_x^n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x]}, x \in E$$

Théorème ergodique (i.e loi des grands nombres)
Chaîne **irréductible + récurrente positive**. $\forall$ mesure λ et $\forall f, g : E \to \mathbb{R}$ intégrables par rapport à λ, et tq $g > 0$. On a :

$$\underset{n\to\infty}{lim} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)}{\sum_{k=0}^{n-1} g(X_k)} = \frac{\sum_{z\in E} f(x)\lambda(z)}{\sum_{z\in E} g(z)\lambda(z)}$$

Si la chaîne est **récurrente nulle**, $\forall f : E \to \mathbb{R}$ qui est λ-intégrable,

$$\underset{n\to\infty}{lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = 0$$

$\forall f : E \to \mathbb{R}\pi$-intégrable, ou π désigne l'unique proba invariante, on a :

$$\underset{n\to\infty}{lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{x\in E} f(x)\pi(x)$$

En particulier, $\forall y \in E$ on a :

$$\underset{n\to\infty}{lim} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{x\}}(X_k) = \pi(y)$$

5 Rappels & tips

$\mathbb{E}[X] = \sum_k k\mathbb{P}(X = k)$

$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$ pour $|a| < 1$ (ça vient de : $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ en passant à la limite)

La chaine est récurrente si :

- $\mathbb{P}_y(V_y = \infty) = 1$
- $\mathbb{P}_y(T_y < \infty) = 1$
- $\mathbb{P}_y(T_y = \infty) = 0$

Classe fermée + finie $\implies$ classe récurrente

$\exists!$ probabilité invariante $\implies$ la chaine est récurrente positive

$\pi(k)\mathbb{P}(k,n) = \pi(n)\mathbb{P}(n,k)\ \forall n = k+1 \implies \pi$ est une mesure réversible
$\sum_k \pi(k) = 1$

une mesure de probabilité réversible est nécessairement invariante !

Si (la somme de chaque ligne de P) = 1, idem pour les colonnes, la matrice est bistochastique !
$\implies \pi = (c, ..., c)$ avec $c \in \mathbb{R}$

(stochastique c'est pour juste somme des lignes = 1, toutes les matrices de transitions sont stochastiques)

Pour prouver qu'une chaine est irréductible, on prouve que les 2 états les plus éloignés(si la chaine est chainé, que tous les états se suivent) communiquent (ie $P^n(0,n) > 0$ par exemple si 0 et n loin)

$e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0} x^k$

Merci au reuf sûr : Andreï de son ptit nom

Figure 1: Andreï Andreïevitch Markov

Version du Wednesday 6th December, 2023(20:52)