

TD1

1

Exercice 1

① $A = 1 + 4\varepsilon > 0 \Leftrightarrow 4\varepsilon > -1$

$\varepsilon x^2 + x - 1 = 0 \quad (\xi)$

$\Leftrightarrow \varepsilon > -\frac{1}{4}$

$\alpha \quad \varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon > -\frac{1}{4} \Rightarrow \exists (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2, r_1 < r_2 \text{ solutions de } (\xi)$

Rappel- Erreur absorption $FE(a+b) = a$ $\leftarrow b \text{ très petit}$ - Erreur d'élimination $FE(a-b) \approx 0$
 $a \approx b$

$\alpha \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & = & = & = \\ \hline \end{array}$

$b \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & = & = & = \\ \hline \end{array}$

② $\varepsilon(x-r_1)(x-r_2) = \varepsilon x^2 + x - 1 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon} = \frac{-1}{2\varepsilon} \pm \frac{\sqrt{1+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

$$r_{1,2} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{2\varepsilon} \pm \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{2} 4\varepsilon + o(\varepsilon^2) \right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+4\varepsilon} = 1 + 2\varepsilon + o(\varepsilon^2)$$

$$\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{2\varepsilon} \pm \frac{1}{2\varepsilon} \pm 1 + o(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + o(\varepsilon^2) \\ r_2 \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} 1 + o(\varepsilon^2) \end{cases}$$

③ r_1 car il est négatif est divisé par ε il est très grand!Lorsque ε est suffisamment petit, on va avoir une erreur d'absorption qui va engendrer une élimination dans le calcul de r_2 .

$$FE(1+4\varepsilon) = 1$$

$$FE(-1+\sqrt{1+4\varepsilon}) = 0$$

Au final on va obtenir $FE(r_2) = 0 \neq 1$.

2

$$1+4\varepsilon = \begin{array}{c} \text{matrice de} \\ \text{taille } 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 10^0 & 10^{-1} & 10^{-2} & 10^{-3} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \text{matrice} \\ \text{taille } 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 10^0 & 10^{-1} & 10^{-2} & 10^{-3} & 10^{-4} & 10^{-5} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$= 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Fl}(-1 + \sqrt{1+4\varepsilon}) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Fl}(r_2) = 0$$

D'autre part, on aura : $\text{Fl}(-1 - \sqrt{1+4\varepsilon}) = -2$

et donc $\text{Fl}(r_1) = \frac{-2}{2\varepsilon} = \frac{-1}{\varepsilon}$

$$\textcircled{5} \quad r_1 r_2 = \frac{1}{4\varepsilon^2} (-1 + \sqrt{1+4\varepsilon}) (-1 - \sqrt{1+4\varepsilon})$$

$$= \frac{1}{4\varepsilon^2} (1 - 1 - 4\varepsilon)$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$r_1 r_2 = -\frac{1}{\varepsilon}$$

Pour "éviter" les erreurs dans le calcul de r_2 , on peut proposer de calculer r_1 puis de poser $r_2 = \frac{-1}{\varepsilon r_1}$.

Exercice 2 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} < +\infty \quad \text{sur un ordinateur.}$$

$$\textcircled{1} \quad I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{20+9x+x^2} dx$$

$$aI_n + bI_{n+1} + c_n = c_n \int_0^1 \frac{ax^n + bx^{n+1}}{20+9x+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{20+9x+x^2} dx$$

TD 1

3

$$I_{n+1} - aI_n - bI_{n-1} = c_n$$

$$\Rightarrow c_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - ax^n - bx^{n-1}}{20 + 9x + x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x^2 - ax - b)}{20 + 9x + x^2} dx$$

$$\begin{matrix} a = -9 \\ b = -20 \end{matrix}$$

$$c_n = \int_0^1 x^{n-1} dx$$

$$= \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n} \quad (a, b, c_n) = (-9, -20, \frac{1}{n})$$

$$I_{n+1} = -9I_n - 20I_{n-1} + \frac{1}{n}$$

② Rappel: Pour $f, g \in \mathcal{C}^0$, on a:

$$\min_{y \in I} f(y) \int_I g(x) dx \leq \int_I f(x) g(x) dx \leq \max_{y \in I} f(y) \int_I g(x) dx$$

$$\cancel{\text{on a}} \quad I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{20 + 9x + x^2} dx \leq \max_{y \in [0,1]} \frac{(20 + 9y + y^2)^{-1}}{1/30} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{30(n+1)}$$

$$\geq \min_{y \in [0,1]} \frac{(20 + 9y + y^2)^{-1}}{1/20} \int_0^1 x^n dx$$

$$\Rightarrow I_n \in \left[\frac{1}{30(n+1)}, \frac{1}{20(n+1)} \right]$$

③ On a la relation de récurrence sur les $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{cases} I_{n+1} = -9I_n - 20I_{n-1} + 1/n \\ I_0 = \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } I_1 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On a, de même, la relation de récurrence sur les intégrales calculées avec une erreur $\varepsilon > 0$, notées $(\tilde{I}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4

$$\begin{cases} \tilde{I}_{n+1} = -9\tilde{I}_n - 20\tilde{I}_{n-1} + 1 \\ \tilde{I}_0 = I_0 + \varepsilon \text{ et } \tilde{I}_1 = I_1 + \varepsilon \end{cases}$$

on a donc que l'écart $E_n = \tilde{I}_n - I_n$ va vérifier :

$$\begin{cases} E_{n+1} = -9E_n - 20E_{n-1} \\ E_0 = E_1 = \varepsilon \end{cases}$$

On peut poser $V_n = \begin{pmatrix} E_n \\ E_{n-1} \end{pmatrix}$

ce qui donne :

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} E_{n+1} \\ E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9E_n - 20E_{n-1} \\ E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & -20 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V_n \Rightarrow V_{n+1} = A^n V_n$$

avec $A = \begin{pmatrix} -9 & -20 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(x) = \begin{vmatrix} -9-x & -20 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (9+x)x + 20 = 9x + x^2 + 20$$

$$\Delta = 81 - 4 \times 20 = 1$$

$$x = \frac{-9 \pm 1}{2} = -5 \text{ ou } -4$$

prenons $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $A = P\tilde{A}P^{-1}$

par -5 :

$$\begin{pmatrix} -4 & -20 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 20y = 0 \\ x + 5y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -5y$$

par -4 :

$$\begin{pmatrix} -5 & -20 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 20y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -4y$$

TD s $E_{-s} = \text{vect} \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix}$ arbitrairement.
 $E_{-4} = \text{vect} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} -s & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|P| = 1$$

$$\frac{1}{\det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -s \end{pmatrix} = P^{-1}$$

On obtient donc $A^n = P \tilde{A}^n P^{-1}$
 et ainsi, on calcule :

$$\begin{pmatrix} E_n \\ E_{n-1} \end{pmatrix} = V_n = A^{n-1} V_1 = A^{n-1} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_0 \end{pmatrix} = E A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{A}^{n-1} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-s)^{n-1} & 0 \\ 0 & (-4)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-s)^n \\ 6(-4)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P \tilde{A}^{n-1} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} (-s)^n \\ 6(-4)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-s)^{n+1} + 6(-4)^n \\ (-s)^n + 6(-4)^{n-1} \end{pmatrix}$$

on a donc : $E_n = (-s(-s)^n + 6(-4)^n) E$
 qui devient énorme lorsque n est grand.

④ L'idée est d'inverser la relation de récurrence

$$I_{n+1} = \frac{1}{20} (9 I_n + I_{n+2} - c_n)$$

$$I_{60} = 8 \text{ et } I_{61} = 8$$

Par les mêmes arguments que pour ③

on va trouver que

$$V_n = A V_{n-1} \leftarrow \begin{pmatrix} E_n \\ E_{n-1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow V_{n-1} = A^{-1} V_n$$

Par récurrence on trouve :

$$V_n = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} E_1 \\ E_0 \end{pmatrix} \leftarrow E \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } E_{n+1} = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^{61-n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{61-n} \right) E$$

6 Exercice 3:

Rappel: $\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max \{ |a_{11}| + |a_{12}|, |a_{21}| + |a_{22}| \}$$

$$\|A\|_\infty = \max \{ 3, 8 \} = 8$$

$$\|B\|_\infty = \max \{ 3, 8 \} = 8$$

Exercice 4

①

$\|A\|_\infty \geq$ à chaque somme des lignes en valeur absolue.

$$\Rightarrow \|A\|_\infty \geq (0,599) + 1,1 \\ \geq 1,599$$

②

$$0,501x - y = 1 \Rightarrow x = \frac{1+y}{0,501}$$

$$\Rightarrow y = \frac{0,501}{0,5012} - 1$$

$$y_{100} = \frac{1}{0,6}$$

$$y_{99} = \frac{y_{100}}{0,599} = \frac{1}{0,6 \times 0,599}$$

$$y_1 = \frac{1}{\prod_{k=501}^{\infty} 0,599} \approx \left(\frac{1}{0,6}\right)^{100}$$

③

$$K_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \geq 1,599 \|A^{-1}\|_\infty$$

$$\|y\|_\infty = \left(\frac{1}{0,6}\right)^{100}$$

$$Ay = e_{100} \Rightarrow y = A^{-1} e_{100}$$

$$\Rightarrow \|y\|_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|e_{100}\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}\|_\infty \geq \left(\frac{1}{0,6}\right)^{100}$$

$$\Rightarrow K_\infty(A) \geq 1,599 \left(\frac{1}{0,6}\right)^{100} \\ \geq 2,45 \cdot 10^{12}$$

TD 7 Exercise 5:

①

$$A = \begin{pmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1999 \\ 1997 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1000x + 999y = 1999 & (L_1) \\ 999x + 998y = 1997 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1000x + 999y = 1999 & (L_1) \\ y(998 - \frac{999^2}{1000}) = 1997 - \frac{999 \cdot 1999}{1000} & \leftarrow L_2 - \frac{999}{1000} L_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1 \\ y = \frac{1997 - \frac{999 \cdot 1999}{1000}}{998 - \frac{999^2}{1000}} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1999 - 999 = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

② $A^{-1} = \frac{1}{998000 - 999^2} \begin{pmatrix} 998 & -999 \\ 999 & 1000 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_{\infty}(A) &= \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} \\ &= 1999 \cdot 1999 \\ &= 3996001. \end{aligned}$$

③ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A(v + \delta v) = b + \delta b \text{ et } \delta b = 10^{-2} v.$$

$$\delta b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\delta v\|_{\infty} = \|\delta v\|_{\infty}$$

$$\|v\|_{\infty}$$

$$K_{\infty}(A) \frac{\|\delta b\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} = 3996001 \frac{0.01}{1999} = 19.99 = \|\delta v\|_{\infty}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

8

et avec $A(u + \delta u) = b + \delta b$

$$\Rightarrow \delta u = A^{-1}(b + \delta b) - u$$

$$= \begin{pmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1999 - 0,01 \\ 1997 + 0,01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= A^{-1} \cdot \delta b$$

$$= \begin{pmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,01 \\ 0,01 \end{pmatrix}$$

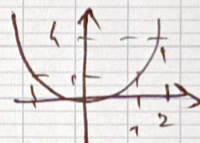
$$= \begin{pmatrix} 19,97 \\ 19,99 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\delta u\|_{\infty} = 19,99 = \|\delta u\|_{\infty} \text{ calculé à la page précédente}$$

Exercice 6:

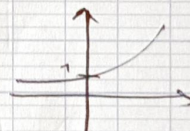
① $f: x \mapsto x^2$

$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow f \text{ convexe}$$



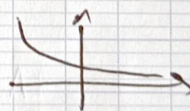
③ $f: x \mapsto e^x$

$$f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow f \text{ convexe}$$



⑤ $f: x \mapsto e^{-x}$

$$f''(x) = e^{-x} > 0 \Rightarrow f \text{ convexe}$$



② $f: x \mapsto e^{-x^2}$

$$f''(x) = (-2xe^{-x^2})'$$

$$= 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}$$

$$= e^{-x^2}(4x^2 - 2) > 0 \text{ si } 4x^2 - 2 > 0$$

$$f \text{ convexe sur } x \in]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty[\text{ (} x^2 > \frac{1}{2} \text{)}$$

$$\mathbb{R} \setminus]\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}[$$

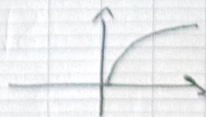
④ $f: x \mapsto \sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

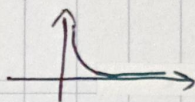
$$u = 1 \quad u' = 0$$

$$v = 2\sqrt{x} \quad v' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{4x} = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0 \Rightarrow \text{pas convexe}$$



TD 9 ⑥ $f: x \mapsto \frac{1}{x}$



$$u = \frac{1}{x} \quad u' = -\frac{1}{x^2} = 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3} > 0 \text{ pour } x > 0$$

f convexe sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 7:

① $p(x, y) = (y - x^2)^2 - x^2 = y^2 - 2yx^2 + x^4 - x^2$

Pour montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, on doit montrer que :

$$H_p(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{les } v_p H_p(x) \text{ sont} \\ \text{strictement positives,} \\ \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{matrix}$$

Rappel

Remq : Pour une matrice M de taille 2×2 .

$$\det M = |M| = \lambda_1 \lambda_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ou } \lambda_1, \lambda_2 \text{ vp de } M. \end{array} \right.$$

$$\hookrightarrow \text{Tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$M > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \det M > 0 \\ \text{Tr } M > 0 \end{cases}$$

$$\nabla p(x) = \begin{pmatrix} -4yx + 4x^3 - 2x \\ 2y - 2x^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 p(x) = \begin{pmatrix} -4y + 12x^2 - 2 & -4x \\ -4x & 2 \end{pmatrix} = H_p(x)$$

$$\text{Tr}(H_p) = -4y + 12x^2$$

$$|H_p| = -8y + 24x^2 - 4 - 16x^2 = 8x^2 - 8y - 4$$

$$\text{pour } (x, y) = (1, 1), |H_p| = 8 - 8 - 4 = -4 < 0$$

$\Rightarrow$ pas convexe

$$\textcircled{2} \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2 = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2x + 2y \\ 4y^3 + 2x - 2y \end{pmatrix}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x - 2 & 2 \\ 2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |H_f| &= (12x - 2)(12y^2 - 2) - 4 \\ &= 12^2 xy^2 - 24x - 24y^2 + \cancel{4} - \cancel{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(H_f) &= 12x - 2 + 12y^2 - 2 \\ &= 12(x + y^2) - 4 \end{aligned}$$

$$\text{pour } (x, y) = (-1, 1), \quad \begin{aligned} |H_f| &= -12^2 + 24 - 24 \\ |H_f| &< 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ pas convexe.

$$\textcircled{3} \quad f(x, y, z) = x^4 + 2y^2 + 3z^2 - yz - 23y + 4x - 5$$

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4 \\ 4y - z - 23 \\ 6z - y \end{pmatrix}$$

TD

11

$$H_P(x, y, z) = \nabla^2 P(x, y, z) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{H_P}(\lambda) = \det(H_P - \lambda I_d) = (12x^2 - \lambda)((4 - \lambda)(6 - \lambda) - 1) \\ = (12x^2 - \lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 23)$$

$$\text{donc } \begin{cases} \lambda_1 = 12x^2 \geq 0 \\ \lambda_2 = 5 + \sqrt{2} > 0 \\ \lambda_3 = 5 - \sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ convexe car $H_P \geq 0$

Exercice 8:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \forall \theta \in]0, 1[,$$

$$\|\theta x + (1 - \theta)y\| \leq \theta \|x\| + (1 - \theta) \|y\|$$

$\Rightarrow \|\cdot\|$ convexe.

12

TD

13

Exercice 9

Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et convexe et $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On veut montrer que $f = g \circ h$ est convexe.

C'est-à-dire, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ et $\forall \theta \in [0, 1]$,

$$\text{on a : } f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

$$\text{On a : } f(\theta x + (1-\theta)y) = g(h(\theta x + (1-\theta)y))$$

et on a :

$$h(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta h(x) + (1-\theta)h(y)$$

Puisque g est croissante, on a alors :

$$g(h(\theta x + (1-\theta)y)) \leq g(\theta h(x) + (1-\theta)h(y))$$

Puis, par convexité de g , on obtient

$$\underbrace{g(h(\theta x + (1-\theta)y))}_{= f(\theta x + (1-\theta)y)} \leq \underbrace{\theta}_{p(x)} \underbrace{g(h(x))}_{p(x)} + \underbrace{(1-\theta)}_{p(y)} \underbrace{g(h(y))}_{p(y)}$$

Sans l'hypothèse de croissance de g , ceci est faux :

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = e^{-x} \\ h(x) = x^2 \end{array} \right\} f(x) = e^{-x^2} \text{ qui n'est pas convexe}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

TD2

Exercice 1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \\ 12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$14. A = LU$$

$$\underbrace{LU}_y x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = b^T$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ x = y \end{cases}$$

Coût: faire la LU $\sim \frac{2}{3}n^3$

- Faire $Lx = b$ (car $Ux = b$) $\sim n^2$

- Faire $A.B \sim 2n^3$

$$\rightarrow Ly = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y_1 = 0, y_2 = -1, y_3 = 3$$

$$\rightarrow Ux = y \text{ maintenant}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_3 = 3, x_2 = -\frac{7}{4}, x_1 = -1$$

Exercice 2

résoudre $A^2x = b$ est équivalent à résoudre $\begin{cases} Ay = b \\ Ax = y \end{cases}$

Si on calcule la LU de A,

on doit donc résoudre

$$\begin{cases} Ly = b \\ Uv = y \\ Lw = v \\ Ux = w \end{cases}$$

TD

$$15 \text{ coût total} = \frac{2}{3}n^3 + 4n^2$$

 $\uparrow$ LU

 $\uparrow$ 4 systèmes triangulaires.

Exercice 3 :

① $[0, 1]$ infimum = 0 qui est un minimum (et le + petit)
supremum = 1 qui est un maximum.

② $]0, 1[$
 $\uparrow$ infimum $\uparrow$ supremum

④ 3 infimum et 8 supremum.

⑥ 3 infimum et 11 supremum + maximum.

③ $]0, 1]$
 $\uparrow$ infimum $\uparrow$ supremum + max

④

⑤ 1 infimum, supremum, max et min.

⑥ 3 infimum + min
11 supremum + max

Exercice 4 :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \beta xy + x + 2y$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + \beta y + 1 \\ 2y + \beta x + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{pts critiques : } \nabla f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \beta y + 1 = 0 \\ \beta x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{pmatrix} = H_f(x, y)$$

$$|H_f(x, y)| = 4 - \beta^2$$

$$\Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - \frac{\beta}{2} L_1 \Rightarrow \begin{cases} 2x + \beta y + 1 = 0 \\ 2y - \frac{\beta^2}{2} y - \beta + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \beta y}{2} \\ y \left(\frac{4 - \beta^2}{2} \right) - \frac{\beta + 4}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} - \frac{\beta}{2} \left(\frac{\beta + 4}{4 - \beta^2} \right) = \frac{-1}{2} - \frac{\beta^2}{8 - 2\beta^2} + \frac{4\beta}{8 - 2\beta^2} \\ y = \frac{\beta + 4}{\frac{4 - \beta^2}{2}} = \frac{\beta + 4}{4 - \beta^2} \end{cases}$$

$$16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-4 + \sqrt{4 - \beta^2} + 4\beta}{8 - 2\beta^2} = \frac{4\beta - 4}{8 - 2\beta^2} = \frac{2\beta - 2}{4 - \beta^2} \\ y = \frac{\beta - 4}{4 - \beta^2} \end{cases}$$

$$4 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = 4 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{4} = \pm 2$$

$$\Rightarrow \beta \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$\nabla \phi(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \text{ pour } (x, y) = \left(\frac{2\beta - 2}{4 - \beta^2}, \frac{\beta - 4}{4 - \beta^2} \right) \quad x^* = \frac{1}{4 - \beta^2} \begin{pmatrix} 2\beta - 2 \\ \beta - 4 \end{pmatrix}$$

On veut maintenant déterminer

$$P_{\nabla^2 \phi(x, y)}(X) = \begin{pmatrix} 2 - x & \beta \\ \beta & 2 - x \end{pmatrix} = \nabla^2 \phi(x, y) - X I_d$$

$$| \cdot | = (2 - x)^2 - \beta^2 = 4 - 4x + x^2 - \beta^2 = x^2 - 4x - \beta^2 + 4$$

$$\Delta = 16 - 4(-\beta^2 + 4) = 16 + 4\beta^2 - 16 = 4\beta^2$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\beta}{2} = 2 \pm \beta = 2 + \beta \text{ ou } 2 - \beta$$

$$|P_{\nabla^2 \phi(x, y)}(x)| = (x - 2 - \beta)(x - 2 + \beta)$$

On veut maintenant déterminer la nature de x^* .
Par cela, on calcule la Hessienne de f :

$$H_p(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{on a donc : } \begin{cases} \det(H_p(x^*)) = 4 - \beta^2 \\ \text{Tr}(H_p(x^*)) = 4 > 0 \end{cases}$$

TO 17 Si $|B| > 2$: $\det < 0$ donc X^* point-selle.
 Si $|B| < 2$: on a $\det(H_p(X^*)) > 0$
 $\rightarrow$ vp de même signe (positif car $\text{Tr} > 0$)
 $\Rightarrow X^*$ min locale
 $\hookrightarrow X^*$ min locale ?

f convexe sur $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ minimum global $\Rightarrow X^*$ min global.

Exercice 5:

① $f(x, y) = (x^2 - 4)^2 + y^2 = x^4 - 8x^2 + 16 + y^2$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 16x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 = 16x \\ y = 0 \end{cases} \xrightarrow{x \neq 0_{\mathbb{R}}} \begin{cases} 4x^2 = 16 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = H_p(x, y)$$

$$H_p(\pm 2, 0) = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_p(\pm 2, 0) = 64 > 0$$

$$\text{Tr } H_p(\pm 2, 0) = 34 > 0$$

donc pour $H_p(0, 0)$

$\Rightarrow$ minimum locale.

$\Rightarrow \det < 0 \Rightarrow$ point-selle

② $f(x, y) = (y - x^2)^2 - x^2 = y^2 - 2x^2y + x^4 - x^2$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -4yx - 2x + 3x^3 \\ 2y - 2x^2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = (0, 0)$
 $x_2 = (-2, 0)$
 $x_3 = (2, 0)$

$f(x_2) = f(x_3) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^2,$

$f(x) \geq f(x_2) = f(x_3)$

$\Rightarrow x_2$ et x_3 globaux.

18

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} -4yx - 2x = 0 \\ 2y - 2x^2 + 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1/2 \\ -1 - 2x^2 - \frac{4}{8} = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1/2 \\ 2x^2 = \frac{-8-4}{8} = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1/2 \\ x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\nabla^2 p(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2y - 2 & -4x \\ -4x & 2 \end{pmatrix} = H_p(x, y)$$

$$2 - \frac{12}{4} = 2 - 3 = -1$$

$$H_p\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_p\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 H_p(X_1) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \text{pt-selle}
 \end{aligned}$$

$$\det H_p\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \det H_p\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -4 \times 3 = -12 < 0$$

$$\text{Tr} H_p\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \text{Tr} H_p\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -1 < 0$$

$\rightarrow$ point-selle car $\det < 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0$

$$\textcircled{3} f(x, y) = \frac{x^2}{2} + x \cos y$$

$$\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} x + \cos y \\ -xy \sin y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\cos y \\ +\cos y \cdot y \sin y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y = 0$$

$$y \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$y \in \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned}
 & x = -\cos y \\
 & \Leftrightarrow y \in \{0, \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\
 & x = -\cos y
 \end{aligned}$$

TD

$$19. \nabla f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\cos y \\ x = 0 \text{ ou } y = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ et } y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = 4\pi \text{ et } x = -\cos(y) = (-1)^{k+1} \end{cases}$$

On identifie 2 familles de points stationnaires :

$$(X_k)_{k \in \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} + k\pi \end{pmatrix} \text{ et } (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} \\ k\pi \end{pmatrix}$$

Pour les caractériser, on calcule :

$$H_p(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin y \\ -\sin y & -x \cos y \end{pmatrix}$$

et on en déduit :

$$H_p(X_k) = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{k+1} \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \det = 1 > 0 \\ \text{Tr} = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{minimum local pour les } (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$H_p(Y_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k (-1)^k \end{pmatrix} = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^2}.$$

$\Rightarrow (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont des minimum locaux.

on a de plus :

$$\begin{aligned} p(Y_k) &= \frac{1}{2} ((-1)^{k+1})^2 + (-1)^{k+1} \cos(k\pi) \\ &= \frac{1}{2} + (-1)^{k+1} (-1)^k \\ &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{et, } \forall x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2} x^2 + x \cos(y) \\ &\geq \frac{1}{2} x^2 - |x| = \frac{1}{2} (|x| - 1)^2 - \frac{1}{2} \\ &\geq -\frac{1}{2} = p(Y_k) \end{aligned}$$

Exercice 6

20 $p(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2$

(1) $\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2x + 2y \\ 4y^3 - 2x + 2y \end{pmatrix}$

$\nabla^2 p(x, y) = H_p(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & +2 \\ +2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$

(2) $\det(H_p(x, y)) = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - 4$
 $= 12^2 x^2 y^2 - 24x^2 - 24y^2 - 4 - 4$
 $= 121 x^2 y^2 + 24x^2 - 24y^2 - 4 - 4$
 $> 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\text{Tr}(H_p(x, y)) = 12x^2 - 2 + 12y^2 - 2 > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow H_p(x, y) \succ 0$

(3) $\|p(x, y)\|_1^2 = |x^4 + y^4 - x^2 - 2xy + y^2|$
 $\leq x^4 + y^4 + x^2 + 2|xy| + y^2$
 $\xrightarrow{(x, y) \rightarrow +\infty} +\infty$

ou toutes les normes sont équivalentes.

$\Rightarrow$

(2) On a :

$\det(H_p(x, y)) = 4(6x^2 - 1)(6y^2 - 1) - 4$

d'où, en

$x = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, on a $\det(H_p(x)) = -4$ donc p n'est pas convexe en x ni sur $\mathbb{R}^2$ de facto !!!

(3) On fait l'estimation, en $x = (y) \in \mathbb{R}^2$.

$p(x) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$

$\xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} \xrightarrow{\|y\| \rightarrow +\infty} \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} \xrightarrow{\|y\| \rightarrow +\infty} \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} \xrightarrow{\|y\| \rightarrow +\infty}$
 $|p(x)| \geq 4\|x\|_\infty^4 - 4\|x\|_\infty^2 \leq 4\|x\|_\infty^4$
 $\leq 2\|x\|_\infty^2 + 2\|x\|_\infty^2 \|x\|_\infty^2$

TD

21 ④ Puisque $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$, on sait qu'il existe $R > 0$ tq,
 $\forall x \notin B(0, R) \quad f(x) \geq M = f(0)$.
 $\{x \in \mathbb{R}^2 = \|x\|_2 \leq R\}$

D'autre part, on a que $B(0, R)$ est un compact de $\mathbb{R}^2$
 (c'est à dire un fermé borné de $\mathbb{R}^2$) donc f atteint
 ses bornes.

En particulier, $f(x) \geq \min_{y \in B(0, R)} f(y)$

$\forall x \in B(0, R), f(x) \geq \min_{y \in B(0, R)} f(y)$

$\forall x \notin B(0, R), f(x) \geq f(c) \geq \min_{y \in B(0, R)} f(y)$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) \geq \min_{y \in B(0, R)} f(y)$

Puisque le minimum est atteint, $\exists x^* \in B(0, R),$
 $f(x) \geq f(x^*), \forall x \in \mathbb{R}^2$.

D'où x^* est un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

⑤ On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tq, $\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 2(x-y) = 0 \\ 4y^3 - 2(y-x) = 0 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} x^3 = y^3 \\ 4y^3 - 2(y-x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y(y^2 - 1) = 0 \end{cases}$

On en déduit les points critiques

$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

⑥ On a :

$\rightarrow H_f(X_1) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ avec $\det(H_f(X_1)) = 0$
 $\text{Tr}(H_f(X_1)) = -4 < 0 \} \Rightarrow X_1 \text{ max. locale}$

$\rightarrow H_f(X_2) = H_f(X_3) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ avec $\det(H_f(X_2)) = 96$
 $\text{Tr}(H_f(X_2)) = 20 > 0 \} \Rightarrow X_2 \text{ et } X_3 \text{ min locaux.}$

22

On sait que X_2 et X_3 sont globaux car :

$$p(X_2) = 1 + 1 - (1 - (-1))^2 = -2$$

$$p(X_3) = -2 \text{ aussi.}$$

Si X_1 est un maximum alors il n'est pas global car p est concave.

TD 23 Exercice 7:

Indicateur : Pour le calcul du gradient, on peut identifier:

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x)^T h + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|_2^2)$$

et, par la Hessienne:

$$\nabla f(x+h) = \nabla f(x) + H_f(x)h + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|_2^2)$$

Rappel : Si A symétrique, il existe une base $(U_k)_{k \in [1, n]}$ orthonormée de vecteurs propres de A .

① On a:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2} (x+h)^T A (x+h) - b^T (x+h) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} x^T A x}_{f''(x)} + \underbrace{\frac{1}{2} h^T A x + \frac{1}{2} x^T A h}_{\nabla f(x)^T h} - \underbrace{b^T h}_{o_{h \rightarrow 0}(\|h\|_2^2)} \end{aligned}$$

et on doit donc avoir:

$$\nabla f(x)^T h = \frac{1}{2} (h^T A x + x^T A h) - b^T h = \left(\frac{1}{2} (A^T + A)x - b \right)^T h$$

par transposition: $(Ax)^T h = x^T A^T h$

De même, on a:

$$\begin{aligned} \nabla f(x+h) &= \frac{1}{2} (A^T + A) (x+h) - b^T \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} (A^T + A)x - b^T}_{\nabla f(x)} + \underbrace{\frac{1}{2} (A^T + A)h}_{H_f(x)h} \end{aligned}$$

d'où, par identification: $H_f(x) = \frac{1}{2} (A^T + A)$

Rappel : Si A est symétrique, il existe une base $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$ orthonormée de vecteurs propres de A .

② Lorsque A est symétrique, on a que:

$$H_f(x) = \frac{1}{2} (A + A^T) = \frac{1}{2} (A + A) = A$$

Ainsi, f sera convexe si A est positive (concave si A négative).

24 (3a) On sait qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de A . On note $(\lambda_k, u_k)_{1 \leq k \leq n}$ des couples de vecteurs propres / valeurs propres de A .

On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$x = \sum_{k=1}^d x_k u_k$$

$$\text{et donc : } Ax = \sum_{k=1}^d x_k Au_k = \sum_{k=1}^d x_k \lambda_k u_k$$

Puis, on a :

$$x^T Ax = \sum_{k,l=1}^d x_l x_k u_l^T Au_k$$

$$= \sum_{k,l=1}^d x_l x_k \lambda_k \underbrace{u_l^T u_k}_{\substack{0 \text{ si } l \neq k \\ 1 \text{ si } l=k}} =$$

$$= \sum_{k=1}^d x_k^2 \lambda_k$$

car u o.n (base orthonormée)

on en déduit :

$$\begin{aligned} x^T Ax &= \sum_{k=1}^d x_k^2 \lambda_k \geq \min_{1 \leq l \leq d} \lambda_l \sum_{k=1}^d x_k^2 \\ &\leq \max_{1 \leq l \leq d} \lambda_l \sum_{k=1}^d x_k^2 \end{aligned}$$

D'autre part, on voit que :

$$\|x\|_2^2 = x^T x = \sum_{k,l=1}^d x_l x_k u_l^T u_k = \sum_{k=1}^d x_k^2$$

d'où l'encadrement :

$$\min_{1 \leq l \leq d} \lambda_l \|x\|_2^2 \leq x^T Ax \leq \max_{1 \leq l \leq d} \lambda_l \|x\|_2^2$$

(b) On a la borne inférieure suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Ax - b^T x$$

$$\geq \frac{1}{2} \lambda_{\min} \|x\|_2^2 - \|b\|_2 \|x\|_2$$

$$\geq \frac{1}{2} \lambda_{\min} \|x\|_2^2 - \|b\|_2 \|x\|_2 = g(\|x\|_2)$$

(1)

(2)

on voit que
 $g(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x = \frac{1}{2} (A_{11} x_1^2 + 2A_{12} x_1 x_2 + A_{22} x_2^2 - b_1 x_1 - b_2 x_2)$
 par identifi. par la m.

grâce à C-S qui donne $|b^T x| \leq \|b\|_2 \|x\|_2$
 On a $p(x) \geq g(\|x\|_2)$ car $g(z) = \lambda_{\min} z^2 - \|b\|_2 z$
 $\xrightarrow{z \rightarrow +\infty} z + \infty \quad \lambda_{\min} > 0$
 donc p est infini à l'infini

(3) On a montré que :

→ p est coercive

→ p est strictement convexe (car $H_p(x)$ est défini positive $\forall x$)

On en conclut que p admet un unique minimum global. Ce dernier vérifie la 1^{ère} condition d'optimalité.

$$\nabla p(x^*) = 0 \Leftrightarrow Ax^* - b = 0 \Leftrightarrow x^* = A^{-1} \cdot b$$

T03

Exercice 1.

Rappel : On peut chercher les racines de F via les points fixes d'une fonction G en de la forme :

$$G(x) := x + \lambda f(x), \lambda \in \mathbb{R}^+$$

De's lors : point fixe de G = racine de F .

Ensuite, on utilise la méthode du point fixe qui requiert que G soit contractante :

$$\|G(x) - G(y)\| \leq k \|x - y\|, \text{ avec } k < 1.$$

~~(1) $F(1)$ négative
 $F(5)$ positif
 $F(-5)$ positif~~

~~par convexité et thm valeurs intermédiaires.
 $\Rightarrow$ 2 racines $\nexists$ (pas convexité).
 $\nexists$ thm valeurs intermédiaires.~~

~~(2)~~

(1) On voit que :

$$f(x) = \ln(x) + x^2 - 2x - 5 \geq x^2 - 2x - 6 = p(x)$$

car p admet comme racines : $x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{8}}{2} = 1 - 2\sqrt{2} < 0$

$$x_2 = 1 + 2\sqrt{2} > 0$$

26

Puisque $F(0) = -4$, on a, par le TVI que F admet une racine dans $[-1-2\sqrt{2}, 0]$ et une autre dans $[0, 2+2\sqrt{2}]$.

② Si on note :

$$R = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = 0\}$$

On suppose que $\inf R = \min R = x_1$
 $\sup R = \max R = x_2$

On a F est strictement convexe :

$$-F''(x) = -\cos x + 2 \geq 1 > 0,$$

$$\text{ainsi, on a, } \forall \theta \in [0, 1], F(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) < \theta F(x_1) + (1-\theta)F(x_2) \\ \Leftrightarrow \forall \theta \in]x_1, x_2[, F(x) < 0 \quad \text{"} \quad \text{"}$$

Ainsi, il n'y a pas d'autres racines entre x_1 et x_2 !

④ D'après le cours, puisqu'il existe, I_1 (resp I_2) au voisinage de x_1 (resp x_2) où F est strictement décroissante (resp croissante) on peut considérer la fonction :

$$f_1(x) = x - \frac{F(x)}{\Pi_1} \quad (\text{resp } f_2(x) = x - \frac{F(x)}{\Pi_2})$$

$$\text{avec } \Pi_1 = \inf_{x \in I_1} F'(x) \quad (\text{resp } \Pi_2 = \max_{x \in I_2} F'(x))$$

⑤ On pose $I_1 = [-2, -1]$ et on a $F'(x) = -\sin(x) + 2x - 2$

On obtient donc, $\forall x \in I_1$,
 $-3 \geq 2x - 1 \geq F'(x) \geq 2e - 3 \geq -7$
 et on choisit $\Pi_1 = -7$.

De même, on a, $\forall x \in I_2 = [3, 4]$
 $7 \geq 2x - 1 \geq F'(x) \geq 2e - 3 \geq 3$
 et on choisit $\tilde{\Pi}_2 = 7 \geq \Pi_2$.

TD 27

On pose donc les fonctions

$$\rightarrow f_1(x) = x - \frac{F(x)}{\tilde{M}_2} = x + \frac{F(x)}{7}$$

$$\rightarrow f_2(x) = x - \frac{F(x)}{\tilde{M}_1} = x - \frac{F(x)}{7}$$

ce qui nous donne :

$$\rightarrow |f_1'(x)| = \left| 1 - \frac{F'(x)}{7} \right|$$

$$\rightarrow 3 \leq F'(x) \leq 7 \rightarrow \left| 1 - \frac{F'(x)}{7} \right|$$

$$\leq \frac{1 - \min_{x \in I_1} |F'(x)|}{7}$$

$$\leq 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

$$\rightarrow |f_2'(x)| = \left| 1 - \frac{F'(x)}{7} \right|$$

$$3 \leq F'(x) \leq 7 \rightarrow \left| 1 - \frac{F'(x)}{7} \right|$$

$$\leq 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

La vitesse de convergence de la méthode du point fixe est donnée par l'inégalité suivante :

$$e_{n+1} = \|x_1 - x_{n+1}\| = \|f(x_1) - f(x_n)\| \leq k \|x_1 - x_n\|$$

$\uparrow$ suite du point fixe $\quad \quad \quad \uparrow$ e_n
 $f(x_1) = x_1 \quad \quad \quad x_{n+1} = f(x_n)$

donc, par récurrence, on obtient :

$$e_n \leq k_1^n e_0 \leq k_1^n \|I\| = k_1^n$$

De même, on trouve,

$$e_n \leq k_2^n e_0 = k_2^n \|I\| = k_2^n$$

$$28 \quad x_{n+1} = p(x_n) \\ = x_n - \frac{p(x_n)}{M}$$

$$\text{avec } M = \begin{cases} \max_{x \in I} f'(x) & \text{croiss.} \\ \inf_{x \in I} f'(x) & \text{décroiss.} \end{cases}$$

Si $|M| < 1$ et f croiss., on voit que $M \approx f'(x)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{f'(x^*)}$$

Exercice 2

$$\textcircled{1} \begin{cases} -5x_1 + 2\sin x_1 + 2\cos x_2 = 0 \\ 2\cos x_1 + 2\sin x_2 - 5x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \sin(x_1) + \frac{2}{5} \cos(x_2) \\ x_2 = \frac{2}{5} \cos(x_1) + \frac{2}{5} \sin(x_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = f(x).$$

② On utilise la méthode du point fixe sur f .

Par cela, il faut vérifier que f est contractante!

Par cela, on utilise les accroissements finis:

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \sup_{z \in [x, y]} \|Jf(z)\|_\infty \|x - y\|_\infty$$

avec

$$Jf(z) = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} \cos(z_1) & -\sin(z_2) \\ -\sin(z_1) & \cos(z_2) \end{pmatrix}$$

on a donc:

$$\|Jf(z)\|_\infty = \frac{2}{5} \max \left(\underbrace{|\cos(z_1)| + |\sin(z_2)|}_{\leq 2}, \underbrace{|\sin(z_1)| + |\cos(z_2)|}_{\leq 2} \right) \\ \leq \frac{4}{5} \leq 1.$$

Ainsi, on a $\sup_{z \in \mathbb{R}^2} \|Jf(z)\|_\infty \leq \frac{4}{5}$ d'où f est

contractante sur $\mathbb{R}^2$. De plus, on a:

$$e_n = \|x^* - x_n\|_\infty \leq \frac{4}{5} e_{n-1} \Rightarrow e_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n e_0$$

↑ point fixe.

1029

③ On a la méthode de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - (J_F(x_n))^{-1} F(x_n)$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} -5x_1 + 2\sin(x_1) + 2\cos(x_2) \\ 2\cos(x_1) + 2\sin(x_2) - 5x_2 \end{pmatrix}$$

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} -5 + 2\cos(x_1) & -2\sin(x_2) \\ -2\sin(x_1) & -5 + 2\cos(x_2) \end{pmatrix}$$

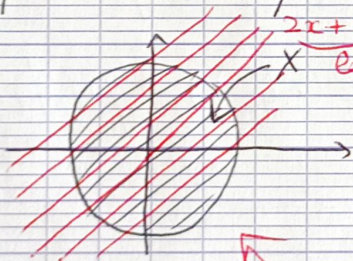
~~Exercice 2~~

Exercice 3

① On veut minimiser la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{donnée par } f(x, y) = y - 2x$$

sur l'ensemble $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$
qui est le disque centré en 0 de rayon 1.



Les lignes de niveaux sont parallèles

lignes de niveau de f sur
les courbes (x, y) telles que
 $f(x, y) = c \in \text{constante}$.

$$\Leftrightarrow c = y - 2x$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + c = 2\left(x + \frac{c}{2}\right)$$

$$p(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y)$$

$$p(0x + (1-0)y) = 0p(x) + (1-0)p(y)$$

② On a que X est fermé et borné donc c'est un compact (car on est sur $\mathbb{R}^2$).

D'autre part, on voit que f est continue (fonction polynomiale à plusieurs variables) donc elle atteint ses bornes sur X . Ainsi, on a que $\inf_{x \in X} f(x, y)$

30

$$\inf_{(x,y) \in X} f(x,y) = \min_{(x,y) \in X} f(x,y) > -\infty$$

donc elle admet un minimum sur X .

③ On voit que f est linéaire :

$$f(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2) = f(x_1, y_1) + \lambda f(x_2, y_2)$$

$$\text{càd } f(x + \lambda z) = f(x) + \lambda f(z) \quad \forall x, z \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

et donc f est convexe puisque $\forall \theta \in [0, 1]$

$$f(\theta z + (1-\theta)y) = \theta f(z) + (1-\theta)f(y)$$

D'autre part, on a que g est aussi convexe.

$$\text{puisque } g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$

On en déduit que les solutions de KKT seront les minimums globaux de f sur X .

$$\min_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ g(x,y) \leq 0}} f(x,y)$$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

$$\text{avec } \lambda \geq 0, g(x,y) \leq 0 \\ \text{et } \lambda g(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla_{x,y} \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ g(x,y) \leq 0 \\ \lambda g(x,y) = 0 \end{cases}$$

KKT

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 2\lambda x = 0 & (6) \\ 2 + 2\lambda y = 0 & (7) \\ \lambda \geq 0 & (8) \\ x^2 + y^2 - 1 \leq 0 & (9) \\ \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0 & (5) \end{cases}$$

On a que $\lambda \neq 0$ (sinon les deux équations n'ont pas de sens) donc on a :

$$(5) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

TD 31

On a 3 équations :

$$\begin{cases} -2 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/\lambda \\ y = -1/2\lambda \\ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/\lambda \\ y = -1/2\lambda \\ \frac{1}{\lambda^2} \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 1 \\ \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \end{cases}$$

Puisque d'après ③, $\lambda \geq 0$, on a donc

$$\lambda = \sqrt{\frac{5}{4}}, \quad x = \sqrt{\frac{4}{5}} \quad \text{et} \quad y = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

qui est l'unique minimum global.

⑤ Pour maximiser f , on minimise $-f$:

$$\max_{(x,y) \in X} f(x,y) = \min_{(x,y) \in X} -f(x,y)$$

En reprenant les mêmes arguments que précédemment, on trouve $-f(x,y) + \lambda g(x,y) = 0$.

$$\begin{cases} \lambda \geq 0 \\ g(x,y) \leq 0 \\ \lambda g(x,y) = 0 \\ \begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0 \\ -1 + 2\lambda y = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/\lambda \\ y = 1/2\lambda \\ \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \end{cases}$$

Et on trouve :

$$\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{-2}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Exercice 4

① La fonction f a été étudiée dans l'exercice 7 du TD2 et on sait qu'elle est coercive (c'est-à-dire qu'on a : $f(x) \geq \lambda_{\min}(A)$ où $\lambda_{\min}$ est la plus petite valeur propre de A).

D'autre part, elle est continue et admet donc un minimum sur $\mathbb{R}^2$ (a fortiori, aussi sur $\mathbb{R}^2$ qui est fermé).

32

L'ensemble des contraintes est fermé car,
 $\forall (x_n) \subset X$ telle que $x_n \rightarrow x^*$ dans $\mathbb{R}^2$, on a
 $g(x_n) \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow g(x^*) \leq 0 \text{ par continuité de } g(x) = \langle x, b \rangle + 1$$

Puisque $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$, on peut prendre $e \in \mathbb{R}^2$, tq

$$\langle b, e \rangle = -1$$

et poser $x_n = ne$ qui vérifie

$$\langle b, x_n \rangle = -n \leq -1$$

$$\Rightarrow \|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \text{ donc } f \text{ n'admet pas de maximum!!}$$

② Puisque A est symétrique défini positive, on sait que
 $p: x \mapsto \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle$

est strictement convexe (car $H_p(x) = A$)

D'autre part, l'ensemble contraint est
 donné par $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle b, x \rangle \leq -1\}$
 $= \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) \leq 0\}$

avec $h: x \mapsto \langle b, x \rangle + 1$ puisque h est affine,
 elle est convexe donc le problème est convexe
 (et strictement convexe).

③ On sait que le problème admet une solution et,
 par strictement convexe, on en déduit qu'elle
 est unique

④ On écrit les équations de KKT :

$$\begin{cases} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) = 0 \\ \lambda h(x) = 0 \\ \lambda \geq 0 \text{ et } h(x) \leq 0 \end{cases}$$

TD 33

avec $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda h(x)$

Puisque $\rightarrow \nabla f(x) = Ax$

$\rightarrow \nabla h(x) = b$

on obtient le système suivant

$$\begin{cases} Ax + \lambda b = 0 \\ \lambda h(x) = 0 \\ \lambda \geq 0 \text{ et } h(x) \leq 0 \end{cases}$$

cas $\lambda = 0$: $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

et ainsi, $h(x) = 1 \geq 0$ donc ceci ne satisfait pas le système.

cas $h(x) = 0$: $Ax = -\lambda b$ donc $x = -\lambda A^{-1}b$.

Exercice 4:

De plus, on a

$h(x) = 0$

$\Leftrightarrow \langle b, -\lambda A^{-1}b \rangle + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda \langle b, A^{-1}b \rangle + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{\langle b, A^{-1}b \rangle}}$

Puisque A est symétrique, on a que A^{-1} est symétrique donc $\langle b, A^{-1}b \rangle > 0$ si $b \neq 0$.

Finalement, on a bien que $\lambda > 0$.

Calcul de ∇h

$h(x+y) = h(x) + \langle \nabla h(x), y \rangle + o(\|y\|^2)$

$\Rightarrow h(x+y) = \langle b, x+y \rangle + 1$

$= \langle b, x \rangle + 1 + \langle b, y \rangle$

$= h(x) + \langle \nabla h(x), y \rangle$

avec $\nabla h(x) = b$

Exercice 1:

- ① $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ strictement convexe!
 $\Rightarrow$ le minimum est unique (et global) s'il existe.

$$f'(x) = 0 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow x = 0$$

$\subset x^2 \neq -1$
 $\text{car } x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ le minimum existe et il satisfait l'unicité!

$\Rightarrow x^* = 0$ est l'unique minimum global de f .

② ① $x_{k+1} = x_k - s_k \cdot f'(x_k)$ direction de descente.

$\nwarrow$ pas.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{s_k \cdot k}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(x_0 - \sum_{i=1}^k \frac{i s_i}{\sqrt{1+i^2}} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

Les méthodes de gradient s'écrivent

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{k+1} = x_k - s_k f'(x_k) \end{cases}$$

avec $(s_k)_{k \geq 0}$ les pas du gradient

Pour $x_k = s f(x_k)$, on a :

$$s_k f'(x_k) = s f(x_k) f'(x_k) = s \cdot x_k$$

Ainsi, la méthode devient $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{k+1} = x_k - s x_k = (1-s)x_k \end{cases}$

TD 35

Par récurrence on a $x_k = (1-s)^k x_0$

Si $s=1$: $x_k = 0$ et on converge en 1 iter

Si $s=2$: $x_k = (-1)^k x_0$ oscillation

Si $s=1/2$: $x_k = \frac{1}{2^k} x_0$ $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

③ La méthode de Newton s'écrit :
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

$$= x_k - x_k(1 \dots)$$

$$= -x_k^3$$

⑥ On a $x_{n+1} = -x_k^3$

Donc, on observe que :

$$x_1 = -x_0^3$$

$$x_2 = -x_1^3 = -(-x_0^3)^3 = x_0^3$$

$$x_3 = -x_2^3 = -x_0^3$$

et on peut penser que la relation de récurrence est : $x_k = (-1)^k x_0^{3^k}$ ce qui est vraie !

On voit donc, puisque $k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$

$$|x_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } |x_0| < 1 \\ +\infty & \text{si } |x_0| > 1 \\ 1 & \text{si } |x_0| = 1 \end{cases}$$

Ainsi, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers la racine lorsque $x_0 \in]-1, 1[$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Exercice 2:

36 ③ $\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}y^2 = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$x^2 + 9y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(ax + cy, bx + dy) (ax^2 + cyx + \dots + bxy + dy^2)$$

$$\Rightarrow ax^2 + cyx + bxy + dy^2 = x^2 + 9y^2$$

$$a=1, d=9, b, c=0$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

A défini positive
 $\Rightarrow$ f coercive
 $\Rightarrow$ strictement convexe.

f continue + coercive $\Rightarrow \exists$ min global
 f convexe $\Rightarrow$ min global unique.

II $\left(\begin{array}{l} f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}y^2 \\ \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 9y \end{pmatrix} \end{array} \right)$

② ~~$X_{k+1} = X_k - s_k \nabla f(X_k)$~~

~~$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - s_k \begin{pmatrix} x_k \\ 9y_k \end{pmatrix}$$~~

$$\begin{cases} X_0 \in \mathbb{R}^2 \\ s_k = \arg \min_{s \in \mathbb{R}} f(X_k - s \nabla f(X_k)) \\ X_{k+1} = X_k - s_k \nabla f(X_k) \end{cases}$$

TD 37

③ On a que $\forall X \in \mathbb{R}^2$,
 $\nabla p(X) = AX$.

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad p(X_k - s \nabla p(X_k)) &= p(X_k - sAX_k) \\ &= p((I_d - sA)X_k) \\ &= \frac{1}{2} X_k^T (I_d - sA)^T A (I_d - sA) X_k \end{aligned}$$

$$\text{On obtient : } (I_d - sA)^T A (I_d - sA) = (A - sA^2)(I_d - sA) \\ = A - 2sA^2 + s^2A^3$$

On en déduit que :

$$\psi(s) = p(X_k - s \nabla p(X_k)) = \frac{1}{2} (X_k^T A X_k - 2s X_k^T A^2 X_k + s^2 X_k^T A^3 X_k)$$

On remarque que :

$$X_k^T A^3 X_k = Y_k^T A Y_k > 0, \quad \forall X_k \neq 0$$

avec $Y_k = AX_k$.

En particulier, l'unique point critique de ψ est son minimum global : $\psi'(s_k) = 0$.

$$\Leftrightarrow -X_k^T A^2 X_k + s_k X_k^T A^3 X_k = 0$$

$$\Leftrightarrow s_k = \frac{X_k^T A^2 X_k}{X_k^T A^3 X_k}$$

⑤ ⑥

Initialisation : $s_0 = \frac{(9, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}}{(9, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{5}$

Hérédité :

$$X_k = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 9 \\ (-1) \end{pmatrix}^k$$

on calcule

$$s_k = \frac{X_k^T A^2 X_k}{X_k^T A^3 X_k} = \frac{\begin{pmatrix} 9 \\ (-1) \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 9 \\ 9^2(-1) \end{pmatrix}^k}{\begin{pmatrix} 9 \\ (-1) \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 9 \\ 9^3(-1) \end{pmatrix}^k} = \frac{9^2 + 9^2}{9^2 + 9^3} = \frac{1+1}{1+9} = \frac{1}{5}$$

38

On a donc

$$X_{k+1} = X_k - \frac{1}{5} \nabla f(X_k)$$

$$= X_k - \frac{1}{5} A X_k = \left(I - \frac{1}{5} A \right) X_k$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 1/5 & 0 \\ 0 & 1 - 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 0 \\ 0 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_k$$

$$= \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ (-1)^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} 9 \\ (-1)^{k+1} \end{pmatrix} \quad \text{ce qui détermine la récurrence.}$$

(b) On a que l'unique minimum global de f vérifie :

$$\nabla f(X^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow A X^* = 0$$

$$\Leftrightarrow X^* = 0$$

On en déduit donc que :

$$\|X^* - X_k\|_2 = \|X_k\|_2 = \left(\frac{4}{5}\right)^k \sqrt{9^2 + 1}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^k \sqrt{82}$$

et ainsi on voit la convergence est linéaire !

$$(\|X^* - X_{k+1}\| \leq \frac{4}{5} \|X^* - X_k\|_2)$$

Exercice 3 :

(1) On souhaite avoir :

$$\forall i \in [1, n], \quad a x_i + b = y_i$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

TD 39 Donc, à moins que $y \in \text{Im}(A)$, on a pas de solutions (a) du problème.

On va donc plutôt chercher à identifier (b) comme la solution du problème

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \|A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - y\|_2 \quad \text{qui est un problème de}$$

moindre carrés linéaires. On veut donc minimiser

la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{2} \|Ax - y\|_2^2$ avec $x \in \mathbb{R}^2$. On calcule le gradient $\varphi(x+h) = \frac{1}{2} \langle A(x+h) - y, A(x+h) - y \rangle$

$$= \frac{1}{2} \langle Ax - y, Ax - y \rangle + \langle Ax - y, Ah \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, Ah \rangle$$

$$= \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), h \rangle + o(\|h\|_2^2)$$

On a donc $\nabla \varphi(x) = A^T(Ax - y)$ et les points critiques de φ sont donc les solutions de $A^T(Ax - y) = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{A^T Ax = A^T y}$$

Equations normales

Si A est de rang maximal avec $A^T A$ est inversible et φ admet un unique point critique.

D'autre part, le problème est convexe car la norme $\|\cdot\|_2$ est convexe et $x \mapsto Ax - y$ est convexe.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2} \langle Ax - y, Ax - y \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle x, A^T Ax \rangle - \langle x, A^T y \rangle + \frac{1}{2} \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

qui est une forme quadratique de matrice hessienne $A^T A$. Donc si A est de rang maximal, alors φ est strictement convexe ! Donc la solution des équations normales est l'unique minimum global du problème.

40 ② On souhaite avoir :

$$\forall i \in [1, n], ax^2 + bx + c = y_i$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

mais on solutionne le problème de minimisation :

$$\min_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3} \left\| A \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} - y \right\|_2$$

TDS

Exercice 1.

On considère les points $\{x_i\}_{0 \leq i \leq 2}$ avec $x_0 = 0, x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

On en déduit la base de Lagrange.

$$\begin{aligned} \rightarrow L_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-1)(-2)} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow L_1(x) = -x^2 + 2x$$

$$\rightarrow L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

① Pour le polynôme P , on voit qu'il est de degré 2 et, sachant que l'on interpole en 3 pts, on sait que le polynôme d'interpolation sera de degré 2. Ainsi, P est son propre polynôme d'interpolation.

② On a :

$$\begin{aligned} P_9(x) &= q(x_0)L_0(x) + q(x_1)L_1(x) + q(x_2)L_2(x) \\ &= L_9(x) + 16L_2(x) \\ &= -x^2 + 2x + 8(x^2 - x) \\ &= 7x^2 - 6x \end{aligned}$$

TD 21
$$P_r(x) = r(x_0)L_0(x) + r(x_1)L_1(x) + r(x_2)L_2(x)$$

$$= -4x^2 + 12x - 8 + 2x^2 - 4x + 20x^2 - 20x$$

$$= 18x^2 - 12x - 8$$

Exercice 2 :

On remarque que l'on interpole q , un polynôme de degré n , avec $n+1$ points. On va donc avoir que q est son propre polynôme d'interpolation.

Exercice 3 :

①
$$L_{0,1}(x) + L_{1,1}(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$= 1$$

② Étant donné la base de Lagrange $(L_{k,n}(x))_{0 \leq k \leq n}$ on a que le polynôme d'interpolation aux points $(x_k, 1)_{0 \leq k \leq n}$ est donné par

$$p(x) = \sum_{k=0}^n 1 \times L_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^n L_{k,n}(x)$$

③ Puisque la fonction $q(x) = 1$ est un polynôme de degrés 0 donc son polynôme d'interpolation est q lui-même.

On en déduit que :

$$p(x) = q(x) = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n L_{k,n}(x) = 1 !$$

Exercice 4 :

①

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
y_i	$(-1)^i$	0	1

$$L_0(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$L_1(x) = -x^2 + 1$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

42 On en déduit le polynôme d'interpolation:
de $x \rightarrow x^n$:

$$\begin{aligned} q_n(x) &= (-1)^n L_0(x) + 0^n x L_1(x) + 1^n L_2(x) \\ &= \frac{1}{2} ((-1)^n x^2 - (-1)^n x + x^2 + x) \\ &= \begin{cases} x^2 & \text{si } n \text{ pair} \\ x & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Si $n=0$: $q_0(x) = 1$ car $p_0(x)$ est un polynôme de degré 0!

② Soit z un polynôme de degré m , Alors
 $z(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^n$

Son polynôme d'interpolation, noté p , est donc tel que:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^2 z(x_k) L_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^2 \sum_{n=0}^m a_n x_k^n L_k(x) \\ &= \sum_{n=0}^m a_n \left(\sum_{k=0}^2 x_k^n L_k(x) \right) \end{aligned}$$

$q_n(x)$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{n=0}^m a_n q_n(x) \\ &= a_0 + \underbrace{\sum_{p=1}^{m/2} a_{2p} x^2}_{\text{pairs}} + \underbrace{\sum_{p=0}^{m-1} a_{2p+1} x}_{\text{impairs}} \end{aligned}$$

TD 13 Exercice 5 -

Soit D l'ensemble des points d'interpolation.

(1) On sait que la base de Newton est :

$$N_0(x) = 1$$

$$N_1(x) = (x - x_0) = x$$

$$N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) = x(x - 1)$$

On cherche les polynômes d'interpolation sous la forme :

$$p(x) = \sum_{k=0}^2 \beta_k N_k(x)$$

et on doit donc résoudre :

$$p(x_j) = y_j, \quad j \in \{0, 1, 2\}$$

ce qui revient à écrire :

$$\begin{pmatrix} N_0(x_0) & N_1(x_0) & N_2(x_0) \\ N_0(x_1) & N_1(x_1) & N_2(x_1) \\ N_0(x_2) & N_1(x_2) & N_2(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

on calcule donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Au final on a :

$$p(x) = 2N_0(x) - N_1(x) - N_2(x) = 2 - x^2$$

(2) On rajoute le point $(3, 0)$ à notre problème d'interpolation. Ceci revient à rajouter le polynôme $N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$$= x(x - 1)(x - 2)$$

puis à résoudre le système suivant :

$$44 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les 3 premières coordonnées de la solution ne changent pas, il faut juste solutionner la dernière ligne :

$$\beta_0 + 3\beta_1 + 6\beta_2 + 6\beta_3 = 0$$

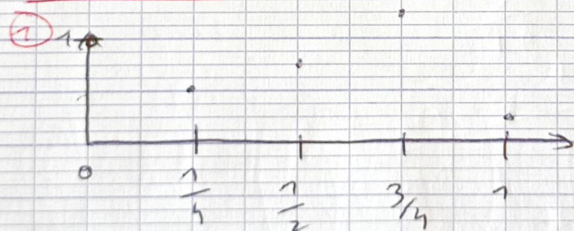
$$\Rightarrow 6\beta_3 = -2 + 3 + 6 \Rightarrow \beta_3 = \frac{7}{6}$$

On en déduit :

$$q(x) = p(x) + \frac{7}{6} N_3(x)$$

$$= \frac{7}{6} x^3 - \frac{9}{2} x^2 + \frac{7}{3} x + 2$$

Exercice 6 :



①

$$I \approx h \sum_{k=0}^3 f(x_k) \quad \text{avec } x_k = \frac{k}{4}$$

$$\approx \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \right)$$

$$\approx \frac{7}{8}$$

TD 15 ② idem 1.

$$I = \frac{11}{16}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad I &\approx h \sum_{k=0}^3 \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{k=0}^3 f(x_k) + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^3 f(x_{k+1}) \\ &\approx \frac{25}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad I &\approx 2h \sum_{k=0}^2 \frac{f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})}{6} \\ &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{4 + 4 \times 2 + 3 + 3 + 4 \times 5 + 1}{4 \times 6} \right) \\ &\approx \frac{39}{48} \end{aligned}$$

Exercice 7:

On veut approximer $F(h) = \int_0^1 (e^{+t^2} + \sin(t)) dt$ par la formule de Simpson et l'intervall.

$$F(h) \approx h \left(\frac{f(0) + 4f(1/2) + f(1)}{6} \right)$$

Exercice 8:

Rappel:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I_{\text{mieux}}^n(f) \right| \leq \frac{b-a}{24} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)| \left(\frac{b-a}{n} \right)^2$$

Ici, on a $[a,b] = [0,1]$ et $f(x) = e^{-x^2/2}$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } f'(x) &= -x e^{-x^2/2} \\ f''(x) &= (1-x^2) e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

ce qui nous donne:

$$\sup_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \sup_{x \in [0,1]} (1-x^2) e^{-x^2/2} = 2e^{-1/2}$$

TD1 → 3, 6 exo 2 par 3 exo 6
 TD2 → Exo 7
 TD3 → Exo 2
 TD4 → Exo 8
 TD5 → Exo 8

1

TD1 : Erreurs, stabilité, conditionnement, convexité

Exercice 1. On cherche à calculer précisément la racine positive de l'équation

$$\varepsilon x^2 + x - 1 = 0$$

où ε est un nombre positif et très petit.

1. Vérifiez que cette équation possède une racine négative, notée r_1 , et une racine positive, notée r_2 .
2. Donner un équivalent pour ε proche de 0 de r_1 et r_2 .
3. D'après vous, est-ce r_1 ou r_2 qui peut présenter un problème lors du calcul machine, justifiez votre réponse.
4. Simuler le calcul de r_1 et r_2 sur une machine virtuelle avec une matisse de taille 4 en base 10 dans le cas où $\varepsilon = 10^{-5}$. Commenter le résultat.
5. Calculer le produit $r_1 r_2$ en fonction de ε et en déduire une méthode qui ne posera pas de problème d'erreur numérique.

Exercice 2. On souhaite calculer les intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{20 + 9x + x^2} dx, \forall n, 1 \leq n \leq 50$$

1. Montrez que les I_n vérifient une relation de récurrence de la forme $I_{n+1} = a I_n + b I_{n-1} + c_n$, où les c_n , $n > 0$ sont des réels ne dépendant que de n .
2. Vérifiez que pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{1}{30(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{20(n+1)}$.
3. En supposant que I_0 et I_1 sont calculés avec une erreur ϵ déterminez l'erreur e_n sur le calcul de I_n .
4. Proposez une méthode simple pour calculer ces intégrales.

Exercice 3. Calculer la norme infinie de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. On considère la matrice 100×100 :

$$A = \begin{pmatrix} 0,501 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0,502 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0,599 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\|A\|_\infty \geq 1,599$.
2. On considère la solution y du système $Ay = e_{100}$ où e_{100} désigne le dernier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{100}$. Montrer que : $y_1 = \frac{1}{0,501 \times 0,502 \times \dots \times 0,6} \geq \left(\frac{1}{0,6}\right)^{100}$.
3. En déduire de $K_\infty(A) \geq 2.10^{22}$.

Exercice 5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1999 \\ 1997 \end{pmatrix}$

1. Calculez la solution u du système $Au = b$. En déduire $\|A\|_\infty = 1999$.
2. Calculez A^{-1} , et montrez que $K_\infty(A) = 3996001$.
3. Soit $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On considère à présent le système perturbé $A(u + \delta u) = b + \delta b$, en choisissant $\delta b = 10^{-2} v$. Vérifiez que

$$\frac{\|\delta u\|_\infty}{\|u\|_\infty} = K_\infty(A) \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

Exercice 6. Draw the following functions and prove that they are convex or prove that they are not

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| 1. $f : x \mapsto x^2$ | 3. $f : x \mapsto e^x$ | 5. $f : x \mapsto e^{-x}$ |
| 2. $f : x \mapsto e^{-x^2}$ | 4. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ | 6. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ |

Exercice 7. Discuss about the convexity or concavity of the following functions

1. $f(x, y) = (y - x^2)^2 - x^2$
2. $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$
3. $f(x, y, z) = x^4 + 2y^2 + 3z^2 - yz - 23y + 4x - 5$

Exercice 8. Let E be a vector space with a norm $\|\bullet\|$, show that the norm is a convex function.

Exercice 9. Let $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ be a convex non-decreasing function and $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ be a convex function. Show that $f = g \circ h$ is convex. Give an example where g and h are convex but $g \circ h$ is non-convex.

TD2 - Conditions d'optimalité, décomposition LU

Exercice 1. Écrire la décomposition LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 5 \\ 12 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \quad \text{ex p. 45}$$

En déduire la solution $x \in \mathbb{R}^3$ du système linéaire $Ax = b$, où $b = (0, -1, 1)^T$.

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, pour résoudre le système $A^2x = b$, connaissant la matrice A , vaut-il mieux calculer A^2 , ou procéder d'une autre façon ?

Exercice 3. Pour les ensembles suivants, donner les infimums et les supremums et préciser le cas échéant si ce sont des minimums ou des maximums :

- | | | | |
|-------------|-------------|-------------------------|-------------------------------------|
| 1. $[0, 1]$ | 3. $]0, 1]$ | 5. $\{1\}$ | 7. $]3, 5[\cup]6, 8[$ |
| 2. $]0, 1[$ | 4. $[0, 1[$ | 6. $[3, 5] \cup \{11\}$ | 8. $]3, 5] \cup]6, 8[\cup \{11\}$ |

Exercice 4. Pour chaque valeur du paramètre β , déterminer les points stationnaires de la fonction :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \beta xy + x + 2y$$

et étudier leur nature (min/max, local/global) ?

→ syst sans forme $Ax = b$
 $\downarrow$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 into ALU

Exercice 5. Soit :

$$f_1(x, y) = (x^2 - 4)^2 + y^2,$$

$$f_2(x, y) = (y - x^2)^2 - x^2,$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x \cos(y).$$

Déterminer les extrema locaux de chaque fonction f_i , $i = 1, 2, 3$, et préciser s'ils sont locaux ou globaux.

Exercice 6. Soit :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2.$$

1. Calculer le gradient et la matrice hessienne de la fonction f .
2. f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^n$?
3. Montrer que f est infinie à l'infini sur $\mathbb{R}^2$. $\rightarrow$ plus grand qu'une borne.
4. En déduire que f admet un point de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
5. Déterminer les points stationnaires de f .
6. Déterminer les points de minimum local de f . Sont-ils globaux ?

Exercice 7. Formes quadratiques en optimisation.

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice quelconque et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x.$$

1. Calculer le gradient et la Hessienne de f . $\rightarrow f(x+h)$
2. Si A est symétrique, à quelle condition la fonction f est-elle convexe ? concave ?
3. *Existence de solution.* Supposons $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique définie positive
 - (a) Soient $\lambda_{\max}$ la plus grande valeur propre de A et $\lambda_{\min}$ la plus petite valeur propre de A . Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_{\min} \|x\|^2 \leq x^\top A x \leq \lambda_{\max} \|x\|^2.$$

- (b) En déduire que f est infinie à l'infini.
- (c) Montrer que f admet un unique point de minimum global, noté x^* , que l'on calculera.
4. Soit $g(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1$.
 - (a) Ecrire g sous la forme : $x \mapsto \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x$ avec A symétrique
 - (b) Déterminer, s'ils existent, les extrema de g et préciser leur nature.
5. **★★ Pour aller plus loin : ★★**
 - (a) Ecrire g sous la forme : $x \mapsto \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x$ avec A non symétrique
 - (b) Que se passe-t-il si on change g par

$$h(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1.$$

TD3 - Systèmes linéaires, équations non linéaires, optimisation sous contrainte.

Exercice 1. Résolution d'une équation non linéaire par point fixe

Soit la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F(x) = \cos(x) + x^2 - 2x - 5.$$

On veut mettre en oeuvre une méthode de point fixe pour calculer les racines de F .

1. ** Montrer que la fonction F admet au moins 2 racines.
2. ** Par convexité, montrer que la fonction F admet exactement 2 racines.
3. ** On pose à présent x_1 et x_2 les deux racines de F . Montrer que la fonction F est monotone autour des racines et identifier son sens de variation.
4. Identifier une fonction f_1 contractante dans un voisinage de x_1 telle que

$$f_1(x_1) = x_1.$$

Faire de même pour x_2 .

5. En appliquant la méthode du point fixe sur un intervalle $I_1 = [-2, -1]$ qui contient x_1 et sur lequel F est monotone, analyser la vitesse de convergence de la méthode. Faire de même pour l'intervalle $I_2 = [3, 4]$ qui contient x_2 et sur lequel F est monotone.

accr. fins

Exercice 2. Résolution d'un système non-linéaire dans $\mathbb{R}^2$. Soit le système d'équations non-linéaires suivant :

$$\begin{cases} -5x_1 + 2 \sin x_1 + 2 \cos x_2 = 0 \\ 2 \cos x_1 + 2 \sin x_2 - 5x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

1. Montrer que ce système peut s'écrire sous la forme $f(x) = x$ et montrer à l'aide du théorème du point fixe que (1) admet une unique solution x^* .
2. Construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x^* et en déduire un algorithme de résolution du système (1). Estimer sa vitesse de convergence, c'est-à-dire la quantité $\|x_n - x\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Ecrire l'algorithme de la méthode de Newton pour le système (1).

accr. fins

Exercice 3. On souhaite minimiser $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sur $X \subset \mathbb{R}^2$ si

$$f(x, y) = y - 2x \quad X = \{(x, y) \text{ t.q. } x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$$

1. Représenter le domaine X les courbes de niveau de f .
2. Montrer que le problème admet une solution.
3. Montrer que le problème est convexe, qu'en déduisez-vous ?
4. Ecrire les équations de KKT et les résoudre. En supposant que les contraintes sont qualifiées, donner le minimum global de f sur X .
5. Que faut-il faire pour maximiser f sur X ?

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$ avec b non nul. Nous cherchons à minimiser la fonctionnelle f sur X si

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle \text{ et } X = \{x \text{ t.q. } \langle b, x \rangle \leq -1\}$$

1. Montrer que le problème de minimisation admet une solution. Discutez du problème de maximisation.
2. Montrer que le problème est convexe, est-il strictement convexe ?
3. Montrer que la solution est unique.
4. Ecrire les équations de KKT, en supposant que les contraintes sont qualifiées, donner la solution du problème.

Exercice 5. ** Projection orthogonale sur un ensemble Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe borné. L'objectif de cet exercice est de déterminer pour $y \in \mathbb{R}^n$ la projection orthogonale de y sur X . Elle est définie comme l'unique solution de

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2} \|x - y\|^2$$

1. Justifier que ce problème est strictement convexe et admet au plus une unique solution ;
2. Justifier que ce problème admet au moins une solution.
3. Dans le cas où $X = \{\|x\|^2 \leq 1\}$, montrer que la solution est donnée par

$$x^* = \begin{cases} y & \text{si } \|y\| \leq 1 \\ \frac{y}{\|y\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Si X est donné par $X = \{g(x) \leq 0\}$ avec g convexe, et si x^* est la projection orthogonale de y sur X , montrer que $y - x^*$ est colinéaire à $\nabla g(x^*)$. Justifiez l'utilisation du terme *orthogonale* dans l'expression *projection orthogonale*.

TD 4 - Algorithmes d'optimisation

Exercice 1. Méthode du gradient et Méthode de Newton sur un exemple simple.

Soit le problème :

$$(P) \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) := \sqrt{1+x^2}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ses deux premières dérivées sont données par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1. Montrer que $x^* = 0$ est l'unique point de minimum global de f .
2. Descente de gradient : de l'importance du choix du pas.
 - (a) Ecrire une itération de la méthode de descente du gradient appliquée au problème (P) . On notera s_k le pas et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des itérés engendrés.
 - (b) On teste 3 stratégies de recherche linéaire :

$$s_k = s f(x_k), \quad \text{avec : } s \in \left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}.$$

Pour chaque valeur possible de s , calculer x_k en fonction de x_0 et étudier la convergence de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Commentez.

3. A propos de la convergence locale de la méthode de Newton

- (a) Ecrire une itération de la méthode de Newton appliquée au problème (P) . On notera $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des itérés engendrés.
- (b) Calculer x_k en fonction de x_0 et étudier la convergence de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Commentez.

Exercice 2. Algorithme de plus profonde descente / Algorithme du gradient à pas optimal.

On considère le problème :

$$(P) \quad \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) := \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}y^2.$$

1. Mettre le problème sous la forme de l'exercice 6 du TD 2 et en conclure sur l'existence et l'unicité du minimum de f .

Mettre sous la forme $A \in M_2(\mathbb{R})$
 tq $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x$, $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2. Décrire une itération de l'algorithme de plus profonde descente (le pas sera noté $s_k > 0$). $A^T X + A X = 2 A X$ car A diagonale $\Rightarrow A^T = A$.
3. On pose : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ecrire f sous la forme : $f(X) = \frac{1}{2} X^T A X$ et calculer $\nabla f(X_k)$.
4. Calculer $\varphi(s) = f(X_k - s \nabla f(X_k))$ et résoudre le problème : $\min_{s>0} \varphi(s)$. Car convexe $\hookrightarrow \varphi'(s) = 0$
5. On choisit comme point initial : $X_0 = (9, 1)$.
- (a) Montrer par récurrence que le pas optimal vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}, s_k = \frac{1}{5}$, et que la suite $X_k = (x_k, y_k)$ des itérés ainsi engendrés est définie par :

$$X_k = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 9 \\ (-1)^k \end{pmatrix}.$$

- (b) Quelle est la solution X^* du problème (P) ? En déduire l'erreur : $\|X_k - X^*\|_2$. De quel type de convergence s'agit-il ?

Exercice 3. Méthode des moindres carrés linéaires.

Soient (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ un nuage donné de points. On cherche la relation existant entre les valeurs x_i et les valeurs y_i . Pour illustrer cet exercice on introduit deux jeux de données :

Jeu A. On possède 6 spécimens fossiles d'un animal disparu et ces spécimens sont de tailles différentes. On estime que si ces animaux appartiennent à la même espèce, il doit exister une relation linéaire entre la longueur de deux de leurs os : le fémur et l'humérus. Voici les données de ces longueurs en cm pour les 5 spécimens possédant ces deux os intacts :

fémur (x_i)	38	56	59	64	74
humérus (y_i)	41	63	70	72	84

Jeu B. On cherche une relation entre les données suivantes :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	-5.3	0.4	2.6	4.3	3	0.5	-5.4

1. Supposons pour commencer qu'il existe une relation linéaire : $y = ax + b$ entre nos données.
- (a) Formuler le problème ci-dessus sous la forme d'un problème d'optimisation (P).

- (b) Montrer que le problème (P) admet un unique point de minimum global $(\bar{a}, \bar{b})$ sur $\mathbb{R}^2$ et caractériser ce point (*On pourra montrer que la solution (a, b) est solution d'un système linéaire que l'on explicitera*).
 - (c) Applications : programmer la résolution numérique de ce problème pour les jeux A et B . Commentez.
2. Au vu des résultats précédents pour le jeu B , on estime que la relation entre les données x_i et y_i , $i = 1, \dots, 7$ est de la forme :

$$y = ax^2 + bx + c$$

- (a) Re-formuler le problème ci-dessus sous la forme d'un problème de moindres carrés linéaires.
- (b) Montrer que la solution (a, b, c) est solution d'un système linéaire que l'on explicitera.
- (c) Applications : programmer la résolution numérique de ce problème pour les jeux A et B . Commentez.

Exercice 4. ★★ Minimisation par moindres carrés. On considère un circuit RLC série en régime permanent (c'est-à-dire quand l'équilibre s'est installé) et en oscillations forcées (c'est-à-dire qu'on impose à ses bornes une tension sinusoïdale). On sait alors (grâce à la physique et en résolvant une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants) que la tension aux bornes du condensateur est de la forme :

$$U(t) = U_{max} \cos(\omega t + \phi), \quad (2)$$

où U_{max} , ω et ϕ sont fonction des caractéristiques du circuit (résistance, inductance, condensateur, tension imposée).

On mesure expérimentalement la tension aux bornes du condensateur. On note U_n la tension mesurée à l'instant t_n pour n variant de 1 à N . A partir de ces N mesures, on souhaite connaître les caractéristiques du circuit RLC, donc les grandeurs U_{max} , ω et ϕ . On va donc chercher les valeurs de U_{max} , ω et ϕ tels que $U(t_n)$ soit le plus proche possible de U_n pour tout n .

1. Expliquer pourquoi le problème décrit ci-dessus se traduit mathématiquement par

$$\min \left\{ f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (x_1 \cos(x_2 t_n + x_3) - U_n)^2, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

2. Traduire ce problème de minimisation en un problème du type $g(x_1, x_2, x_3) = 0$. Calculer explicitement la fonction g .

3. Ecrire l'algorithme de la méthode de Newton pour résoudre le problème du
b). Quelle difficulté allez-vous rencontrer pour mettre en œuvre numériquement
ce programme ? Quelle alternative proposez-vous ? On explicitera tous les
systèmes linéaires auxquels on se ramène.

TD5 - Intégration et interpolation

Exercice 1. Soit $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, et $x_2 = 2$. On considère les polynômes suivant

$$p(x) = x^2 - 2, \quad q(x) = x^4 \quad \text{et} \quad r(x) = 2x^4 + 4x^2 - 8.$$

Trouver les polynômes d'interpolation de Lagrange a , b et c qui, aux points $(x_k)_{0 \leq k \leq 2}$, interpolent p , q et r .

Exercice 2. Soit q un polynôme de degré n et $(x_k)_{0 \leq k \leq n} \subset \mathbb{R}$. En considérant les points d'interpolations $\{(x_k, q(x_k))\}$, montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange p est tel que

$$p(x) = \sum_{k=0}^n q(x_k) L_{k,n}(x) = q(x).$$

Exercice 3.

1. Soit x_0, x_1 deux réels distincts. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$L_{0,1}(x) + L_{1,1}(x) = 1,$$

où $L_{j,1}$ sont les polynômes de Lagrange associés à la famille de points (x_0, x_1) .

2. Soit $n \geq 1$ et $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \subset \mathbb{R}$. Écrire le polynôme p d'interpolation de Lagrange aux points $\{(x_k, 1)\}_{0 \leq k \leq n}$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = 1$, et en déduire que

$$\sum_{k=0}^n L_{k,n}(x) = 1.$$

Exercice 4. Soit $n \geq 0$. On considère le polynôme $p_n(x) = x^n$.

1. Identifier le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.
2. Soit q un polynôme de degré $m \geq 0$. En déduire une formule d'interpolation aux points $(x_k)_{0 \leq k \leq 2}$ (en fonction de ses coefficients $(a_j)_{0 \leq j \leq m}$) de q .

Exercice 5. Soit l'ensemble de points de $\mathbb{R}^2$

$$D = \{(0, 2), (1, 1), (2, -2)\}.$$

1. Déterminer le système triangulaire associé à la méthode d'interpolation de Newton. En déduire l'expression du polynôme d'interpolation dans la base des polynômes de Newton.
2. On ajoute le point $(3, 0)$ à D . Trouver le nouveau polynôme d'interpolation associé dans la base des polynômes de Newton.

Exercice 6. On considère une fonction f que l'on suppose C^4 et telle que

$$f(0) = 1, \quad f(1/4) = 1/2, \quad f(1/2) = 3/4, \quad f(3/4) = 5/4 \quad \text{et} \quad f(1) = 1/4.$$

Donner l'approximation de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$ en utilisant

1. la méthode des rectangles à gauche,
2. la méthode des rectangles à droite,
3. la méthode des trapèzes,
4. la méthode de Simpspon.

cf Cam.
~ faire moins d'intervalle (ici $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$)

Exercice 7. Soit $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} + \sin(t)dt$. En utilisant la méthode de Simpson avec trois points (un intervalle), donner l'approximation de $F(4)$.

Exercice 8. Soit la fonction f donnée par

$$f(x) = e^{x^2/2}.$$

On cherche à trouver une approximation de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$.

1. En introduisant les points équirépartis

$$x_{j-1/2} = \frac{j-1/2}{n}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

donner une estimation de l'erreur commise lorsqu'on utilise la méthode du point milieu.

2. En déduire une minoration de n de manière à obtenir une erreur strictement inférieure à $\varepsilon = 10^{-10}$.

Lagrange

$$L_k(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j}}{\prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x_k-x_j}{x_k-x_j}} \quad \text{et} \quad p(x) = \sum_{j=0}^n y_j L_j(x)$$

si deg du poly + 1 = nb de points alors $p(x) = \text{poly}$

Newton

$$\begin{cases} N_0(x) = 1 \\ N_k(x) = \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (x-x_j)}{\prod_{j=0}^{k-1} (x_k-x_j)} \end{cases} \quad \text{puis} \quad p(x) = \sum_{j=0}^n z_j N_j(x)$$

avec $z_j = \frac{y_j - p(x_j)}{x_j - x_j}$ (cf p. 107)